



Centro Stampa

**ATTENZIONE QUESTI APPUNTI SONO OPERA DI STUDENTI , NON SONO STATI VISIONATI
DAL DOCENTE. IL NOME DEL PROFESSORE SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

N° 4532

FISICA 2

TEORIA ESERCIZI

2022-23

DI PEIRO STEFANO

CONTENUTI DI RIPASSO :

– LEGGI DI NEWTON :

- Se un corpo di massa m cambia velocità (velocità non costante), allora su di esso agisce una forza data da $F=ma$
- Se c'è F , allora c'è anche una sorgente di F (un altro corpo) “non troppo lontano”
- Le forze fra corpi interagenti diversi sono uguali e opposte

– FORZE GRAVITAZIONALI :

Tra due o più masse si esercita la forza di attrazione gravitazionale.

Due corpi di masse m_1 e m_2 posti a distanza r molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, interagiscono con una forza attrattiva la cui intensità è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} [Nm^2 / Kg^2]$$


– ELETTROMAGNETISMO :

Nell'elettromagnetismo si tratta una sola forza, ossia la **FORZA DI LORENTZ** (FL), la quale ha una parte elettrica e una magnetica.

- **PARTE ELETTRICA**: la quale ha un comportamento simile a mg , infatti decade con la distanza dalla sorgente con l'andamento di $1/r^2$ (quindi più si è lontani dalla sorgente e più la forza è minore). Però, a differenza delle masse, le cariche possono generare non solo forze attrattive, ma anche forze repulsive; in base al segno della carica (positiva/negativa).

- **PARTE MAGNETICA**: dipende invece dalla velocità v che le cariche possiedono, perciò dalla loro cinetica.

Per descrivere la FORZA DI LORENTZ occorrono due campi, ossia:

- Il **CAMPO ELETTRICO** E
- Il **CAMPO MAGNETICO** B

LA FORMULA DELLA FORZA DI LORENTZ È :

$$\vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B})$$

VOLENDOLA ESPRIMERE IN TERMI DI EQUAZIONE DEL MOTO DI PARTICELLE

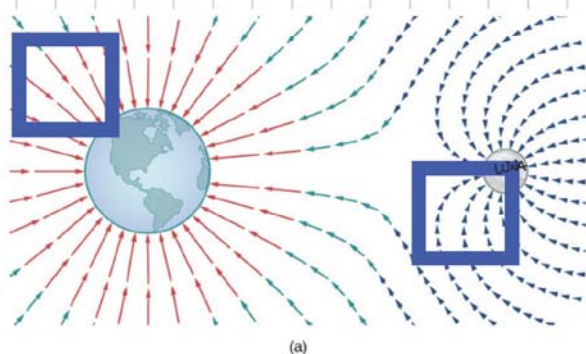
$$\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d m \vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

CARATTERISTICHE DELL'INTERAZIONI FRA CAMPI E PARTICELLE:

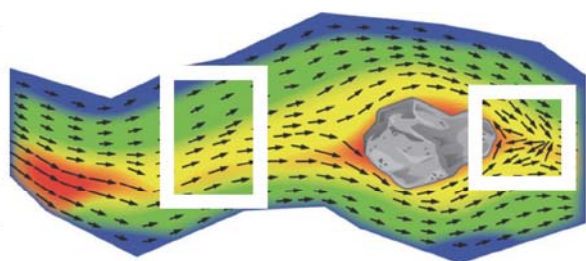
Le interazioni fra campi e particelle hanno la caratteristica di essere:

- **Locali:** ogni oggetto (campo/particella) agisce in modo più intenso su oggetti vicini che su oggetti lontani. Quindi gli oggetti vicini sentono una maggiore interazione rispetto a quelli lontani.
- **Si propagano a velocità finita:** l'influenza di un oggetto su un altro non è istantanea ma richiede un certo tempo (che può essere brevissimo ma non è nullo). Quindi l'interazione si verifica dopo un certo tempo.

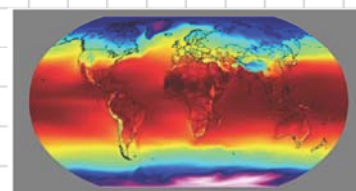
CAMPI VETTORIALI: NEL CASO DEI CAMPI VETTORIALI C'È L'ASSEGNAZIONE DI UN VETTORE AD OGNI PUNTO DELLO SPAZIO.



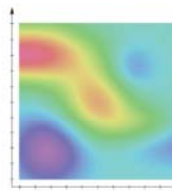
(a)



CAMPI SCALARI: NEL CASO DEI CAMPI SCALARI C'È L'ASSEGNAZIONE DI UN VALORE SCALARE AD OGNI PUNTO DELLO SPAZIO.



Annual Mean Temperature



-0.382 +0.459

COMPONENTI NORMALI E TANGENZIALI DI UN VETTORE:

- **COMPONENTE NORMALE:**

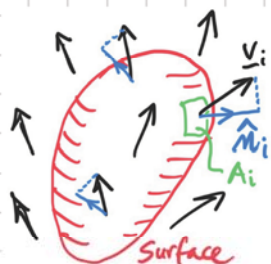


FIG. 3

La componente normale di un vettore rispetto a una superficie rappresenta la proiezione di tale vettore sulla normale a tale superficie.

$$v_{\perp} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

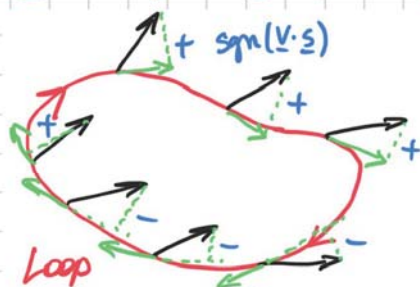
IL MODULO DELLA COMPONENTE NORMALE $v_{\perp}$ È DATO DAL PRODOTTO SCALARE TRA IL VETTORE $\mathbf{v}$ E IL VETTORE NORMALE ALLA SUPERFICIE $\hat{\mathbf{n}}$ IN UN CERTO PUNTO.

IL MODULO DELLA COMPONENTE NORMALE

MEAN È DATO DAL RAPPORTO TRA LA SOMMA DI TUTTE LE COMPONENTI NORMALI, MOLTIPLICATE PER LA LORO AREA INFINITESIMALE, E L'AREA TOTALE.

$$\langle v_{\perp} \rangle = \frac{\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) A_i}{\sum_i A_i} \equiv \frac{\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) A_i}{A_{tot}}$$

-COMPONENTE TANGENZIALE



La componente tangenziale di un vettore rispetto ad una curva rappresenta la proiezione di tale vettore sulla retta tangente ad un punto della curva.

$v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ IL MODULO DELLA COMPONENTE TANGENZIALE $v_{\parallel}$ È DATO DAL PRODOTTO

SCALARE TRA IL VETTORE $\mathbf{v}$ E IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA $\hat{\mathbf{s}}$ IN UN CERTO PUNTO.

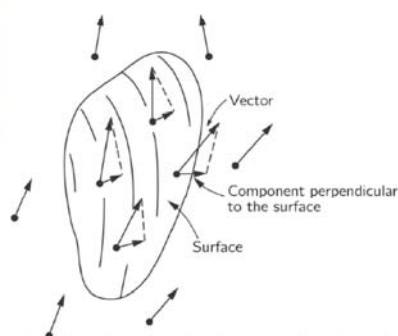
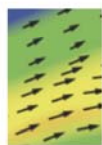
$$\langle v_{\parallel} \rangle = \frac{\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_i) L_i}{\sum_i L_i} \equiv \frac{\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_i) S_i}{L_{\text{tot}}}$$

IL MODULO DELLA **COMPONENTE TANGENZIALE MEDIA** È DATO DAL RAPPORTO TRA LA SOMMA DI TUTTE LE COMPONENTI TANGENZIALI,

MOLTIPLICATE PER LA LORO LUNGHEZZA DI CURVA INFINITESIMALE CORRISPONDENTE, E LA LUNGHEZZA TOTALE DELLA CURVA.



FLUSSO :



IL **FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE** è l'integrale su una superficie chiusa S di un campo vettoriale $\mathbf{h}$, moltiplicato scalarmente per il versore normale alla superficie.

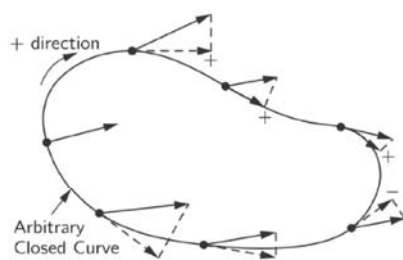
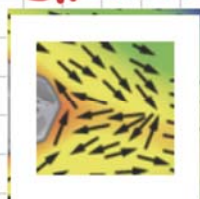
$$\int_S (\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) da = \text{Flusso di } \mathbf{h} \text{ attrav. } S$$

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE

Flusso = (componente normale media) • (area della superficie)

$$\text{INFATTI } \sum_i (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i) \cdot A_i = \int_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) da$$

CIRCUITAZIONE :



La **CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE** lungo una curva è l'integrale lungo una linea chiusa di un campo vettoriale.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} \simeq \sum_i \mathbf{C}_i \cdot d\mathbf{s}_i$$

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE

Circuitazione = (componente tangenziale media)
• (lunghezza del circuito)

APPENDICE MATEMATICA:

• **PRODOTTO SCALARE**: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = (\text{SCALARE})$

• **PRODOTTO VETTORIALE**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

• **PRODOTTO VETTORIALE TRA VETTORI IDENTICI**: $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

• $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ INFATTI $= \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{A}) = \vec{B} \cdot \vec{0} = 0$

• $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$

• $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

• **VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI UN VETTORE CON LE DERIVATE PARZIALI DI ORDINE 1**:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z = \nabla T \cdot \Delta R$$

- DOME ∇T È IL GRADIENTE DEL CAMPO SCALARE $T(x, y, z)$, OSSIA IL VETTORE DELLE DERIVATE PARZIALI: $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$

- MENTRE ΔR È IL VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI: $\Delta R = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

• **GRANDEZZE DERIVATE DA UN CAMPO VETTORIALE $\vec{h}$**

- **DIVERGENZA**: $\text{div} \vec{h} =: \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$

$$\text{con } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ e } \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

- ROTORE :

$$\text{rot } \vec{h} := \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

$$= \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}, \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}, \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right)$$

• LAPLACIANO :

- NEL CASO DEI CAMPI SCALARI T

$$\nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- NEL CASO DEI CAMPI VETTORIALI $\vec{h}$

$$\nabla^2 \vec{h} = \left(\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z \right)$$

ESEMPIO: 1 $\vec{h} = (3x - z, 4y + z + 1, -x + y)$

DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 7 \quad (\text{costante})$$

ROTORE

$$\nabla \times \vec{h} = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}, \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}, \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{costante})$$

$$\nabla^2 \vec{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z) = (0, 0, 0)$$

2 $\vec{h} = (3x^2 - z, 4y + z + 1, -x + y^2)$

DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \vec{h} = 6x + 4 \quad (\text{varia da punto a punto secondo la coordinata } x)$$

ROTORE

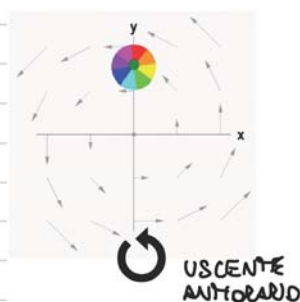
$$\nabla \times \vec{h} = (2y - 1, 0, 0) \quad (\text{varia da punto a punto secondo la coordinata } y)$$

$$\nabla^2 \vec{h} = (6, 0, z)$$

SIGNIFICATO FISICO DEL ROTORE: IL ROTORE È UN VETTORE CHE RAPPRESENTA IL VERSO DI ROTAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE, SECONDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA.

QUINDI CONSIDERATA UNA SUPERFICIE SE IL VETTORE ROTORE È ENTRANTE, ALLORA IL VERSO DI ROTAZIONE È ORARIO, MENTRE SE USCENTE, ALLORA IL VERSO DI ROTAZIONE È ANTIORARIO.

ESEMPIO: $C = (-y, x, 0)$ $C = \frac{(-y, x, 0)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ $C = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ $C = (y, 0, 0)$



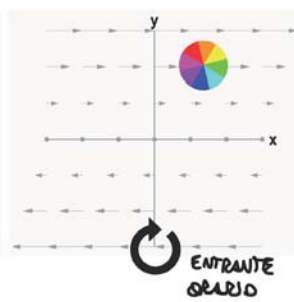
$$\nabla \times C = (0, 0, 2)$$



$$\nabla \times C = \frac{(0, 0, -1)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$



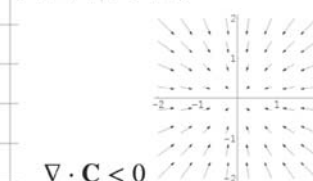
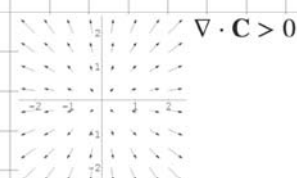
$$\nabla \times C = (0, 0, 0)$$



$$\nabla \times C = (0, 0, -1)$$

SIGNIFICATO FISICO DELLA DIVERGENZA

La divergenza è una quantità scalare che determina la tendenza delle linee di flusso di un campo vettoriale a confluire verso una sorgente o diramarsi (divergere) da essa. In particolare se la divergenza è > 0 allora si diramano dalla sorgente, mentre se < 0 allora confluiscono su essa.



TEOREMA DELLA DIVERGENZA DI GAUSS:

FLUSSO

$$\int_S (C \cdot n) da = \int_V (\nabla \cdot C) dV$$

INTEGRALE SU VOLUME DELLA DIVERGENZA

L'integrale su una superficie chiusa S di un campo vettoriale C (cioè il Flusso di C attraverso S) è uguale all'integrale della Divergenza di C sul volume racchiuso da S

QUINDI APPROSSIMATIVAMENTE

$$\text{FLUSSO} = \text{DIVERGENZA} \cdot \text{VOLUME}$$

TEOREMA DEL ROTORE DI STOKES:

CIRCUITAZIONE

$$\oint_{\Gamma} C \cdot ds = \int_S (\nabla \times C) \cdot n da$$

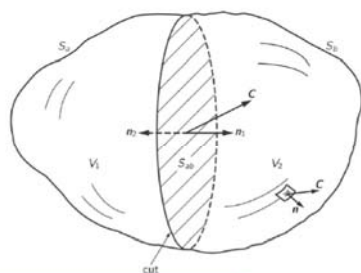
FLUSSO DEL ROTORE
INTEGRALE SU SUPERFICIE DEL PRODOTTO SCALARE TRA LA NORMALE E IL ROTORE

L'integrale di linea su una curva chiusa Γ di un campo vettoriale C (cioè la Circuitazione di C lungo Γ) è uguale all'integrale del Rotore di C sulla superficie S racchiusa da Γ

APPROSSIMATIVAMENTE: $\text{CIRCUITAZIONE} = \text{ROTORE} \cdot \text{AREA}$

NOTE:

Nota sul flusso



Il **Flusso** attraverso una superficie chiusa S è la somma dei flussi attraverso i pezzi in cui il volume racchiuso da S è spezzato

Nota sulla circuitazione

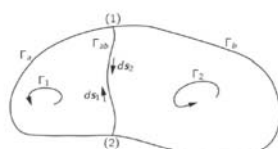


Fig. 3-8. The circulation around the whole loop is the sum of the circulations around the two loops: $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ and $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

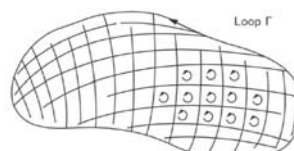


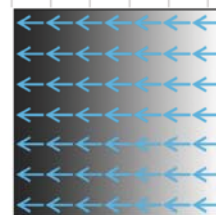
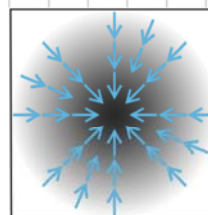
Fig. 3-9. Some surface bounded by the loop Γ is chosen. The surface is divided into a number of small areas, each approximately a square. The circulation around Γ is the sum of the circulations around the little loops.

La **Circuitazione** lungo una curva chiusa Γ è la somma delle circuitazioni lungo curve chiuse che contengono i pezzi in cui la superficie racchiusa da Γ è scomposta

OSSERVAZIONI SU ROTORI E DIVERGENZE DI CAMPI SCALARI E VETTORIALI:

SIA T UN CAMPO SCALARE TALE CHE:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$



ALLORA:

1) $\nabla \times (\nabla T) = \vec{0}$ PER OGNI T , INFATTI PER IL TEOREMA DI SHWARTZ:

IL ROTORE DEL GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE È NULLO

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \frac{\partial (\nabla T)_y}{\partial x} - \frac{\partial (\nabla T)_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

QUINDI:

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \exists \psi : \mathbf{A} = \nabla \psi$$

ROTORE DI UN CAMPO SCALARE
CAMPO VETTORIALE

Se $\mathbf{A}$ è un campo vettoriale con rotore nullo, esiste un campo scalare ψ tale che $\mathbf{A}$ è il gradiente di ψ

2) PER OGNI CAMPO VETTORIALE $\vec{h}$ $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$

LA DIVERGENZA DEL ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE È NULLA

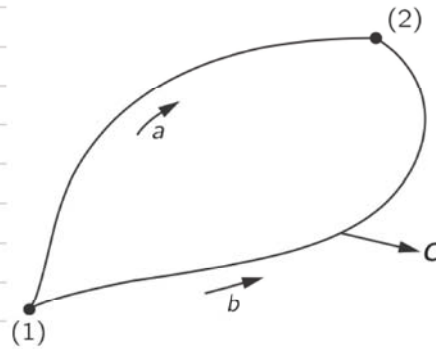
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{C} : \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{C}$$

CAMPO VETTORIALE
DIVERGENZA = 0

Se $\mathbf{A}$ è un campo vettoriale con divergenza nulla, esiste un campo vettoriale $\mathbf{C}$ tale che $\mathbf{A}$ è il rotore di $\mathbf{C}$

$$3) \nabla \times \mathbf{C} = \mathbf{0} \rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ per ogni curva chiusa } \Gamma$$

L'INTEGRALE SU LINEA CHIUSA DI UN CAMPO IRROTAZIONALE (ROTORE NULO) È A SUA VOLTA NULO; INDIPENDENTEMENTE DALLA CURVA SCELTA.



EQUAZIONI DI MAXWELL :

1) FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO SUP. CHIUSA :

Flusso di E attraverso una superficie chiusa S è dato dal rapporto tra carica netta interna e la costante dielettrica (ϵ_0). Tale campo E è generato dalle cariche elettriche e se E esce dalla superficie allora la carica interna è positiva, mentre se E entra nella superficie allora la carica interna è negativa.

$$\text{QUINDI FLUSSO } \vec{E} = \frac{\text{CARICA INTERNA } (q)}{\text{COSTANTE DIELETTRICA } (\epsilon_0)}$$

DAL MOMENTO CHE $\text{DIV.} = \text{FLUSSO} / \text{VOLUME}$

$$\text{ALLORA: } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\text{CARICA INTERNA}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\text{VOLUME}} = \frac{\text{DENSITÀ DI CARICA } \rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0}$$

N.B. DAL MOMENTO CHE LA DENSITÀ DI CARICA VARIA NELLO SPAZIO, ALLORA ANCHE LA DIVERGENZA DI $\vec{E}$ ASSUME UN VALORE DIVERSO IN BASE ALLA POSIZIONE.

2) FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO SUP. CHIUSA :

Il Flusso del campo magnetico B attraverso una superficie chiusa S è nullo, perché le linee di campo sono nulle e non esistono delle "cariche magnetiche"

$$\text{QUINDI FLUSSO } \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot B = 0}$$

N.B.: DAL MOMENTO CHE IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO È NULLO, ALLORA IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO È 0.

3) CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO IL BORDO DI UNA SUPERFICIE APERTA :

Circuitazione del campo elettrico E attorno al bordo di una superficie aperta C (bordo di sup. S aperta) è pari a: $-(d/dt)$ (flusso di B attraverso S)

Perciò significa che il campo elettrico E e quello magnetico B sono tra loro legati.

$$\text{QUINDI CIRCUITAZIONE } \vec{E} = - \frac{d \text{ FLUSSO } \vec{B} \text{ ATT. } S}{dt}$$

DAL MOMENTO CHE IL ROTORE = CIRCUITAZIONE / AREA

QUINDI:
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d \text{FLUSSO } \vec{B}}{dt} \cdot \frac{1}{\text{AREA}} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

4) CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO IL BORDO DI UNA SUPERFICIE APERTA:

$$c^2 \cdot (\text{Circ. di } \mathbf{B} \text{ attorno a } C) = (d/dt) (\text{flusso di } \mathbf{E} \text{ attrav } S) + (\text{flusso di corrente el. attrav } S)/\epsilon_0$$

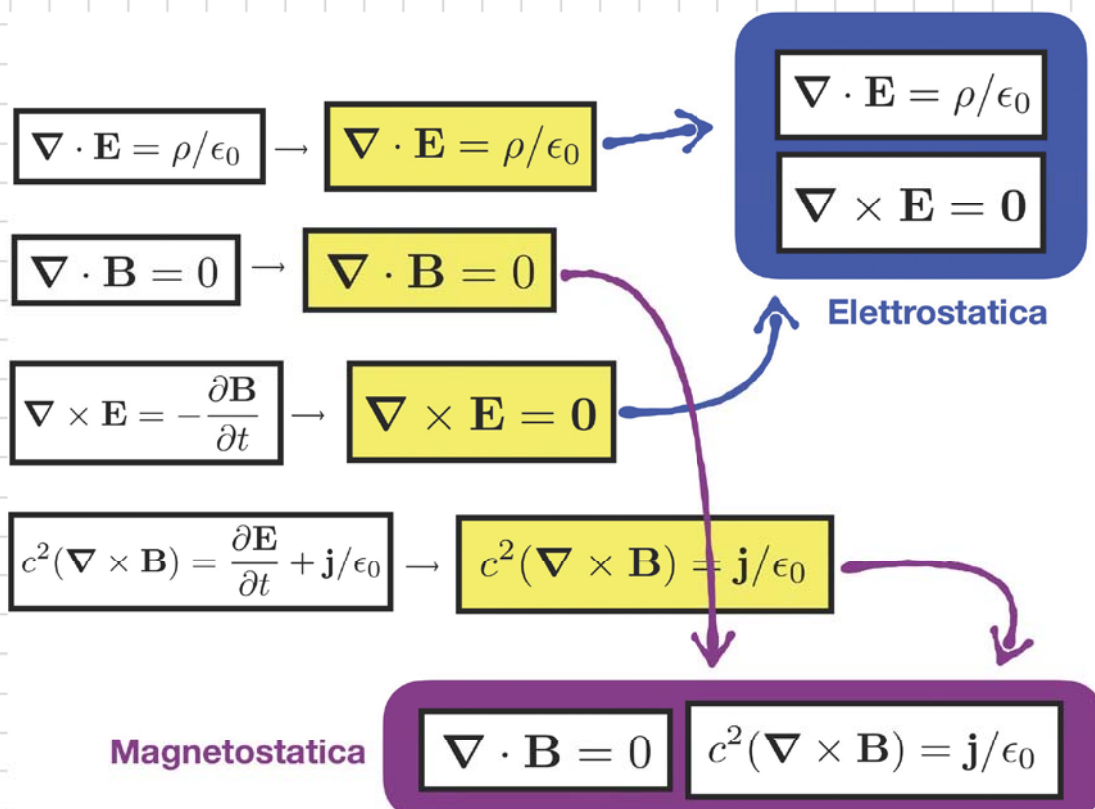
QUINDI:

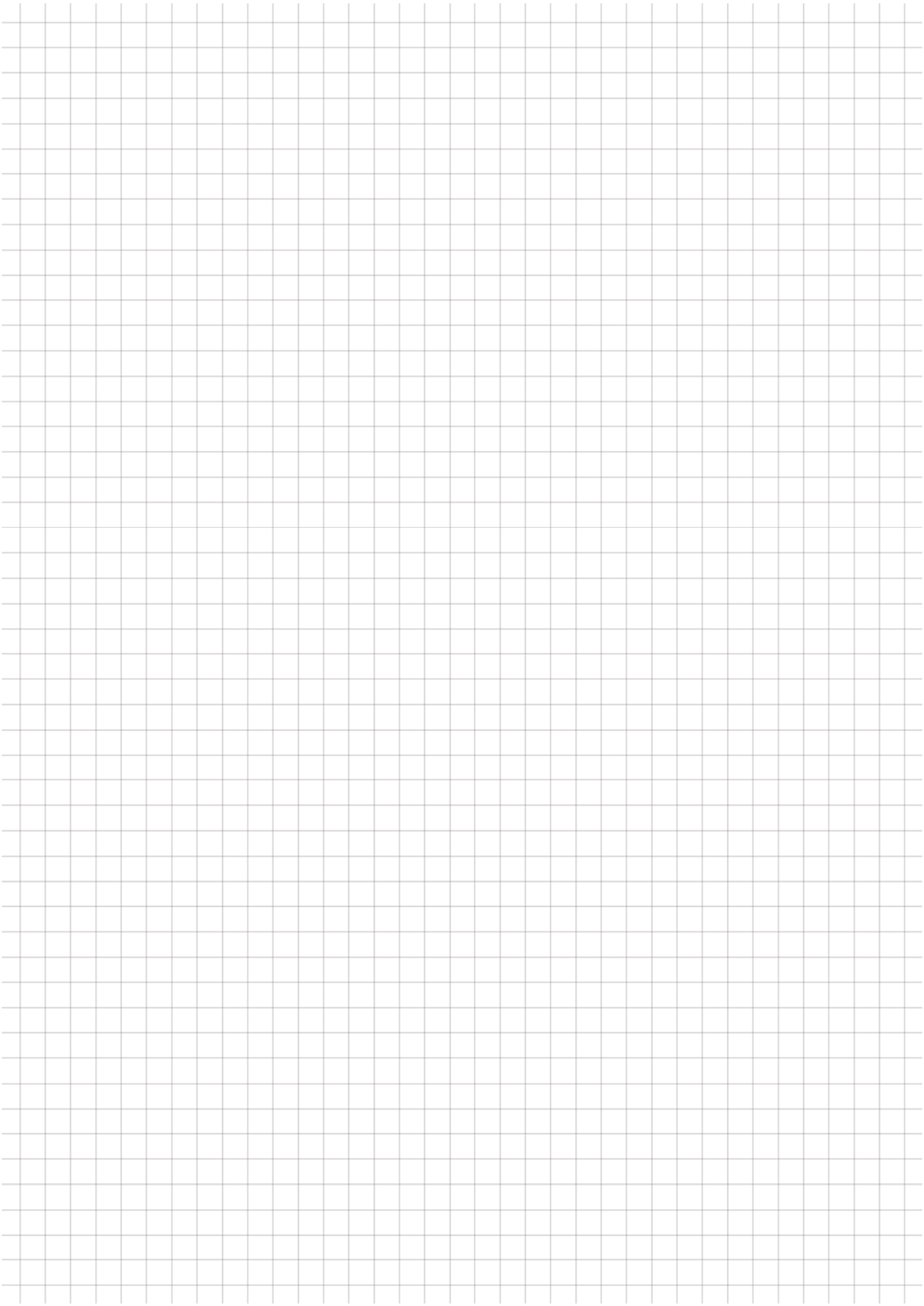
$$c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} \cdot \text{AREA} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \right) + \frac{\text{CORRENTE EL.}}{\epsilon_0}$$

FLUSSO $\vec{E} = \vec{E}_{\text{NORMALE}} \cdot \text{AREA}$

$$c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{d \vec{E}}{dt} + \frac{\text{DENSITA' DI CORRENTE EL.}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}/\epsilon_0}$$

CASO STATICO: NEL CASO STATICO PRENDI I CAMPI IN MODO INDIPENDENTE DAL TEMPO, PERCIÒ LE EQUAZIONI DI MAXWELL DIVENTANO:





ELETTROSTATICA

Nell'elettrostatica siamo interessati a studiare com'è fatto il campo elettrico $\vec{E}$ nel caso statico, ossia indipendentemente dal tempo.

Quindi data una densità di carica che dispone solo della posizione nello spazio si vuole trovare com'è fatto il campo elettrico generato dalle cariche nello spazio.

DATA UNA DENSITÀ DI CARICA $\rho(\vec{r})$ NELLO SPAZIO NEL CASO STATICO, ADESSO PER TROVARE IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ BASTA SFRUTTARE LE EQUAZIONI DI MAXWELL $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ E $\nabla \times \vec{E} = 0$ (CASO STATICO)

DAL MOMENTO CHE IL FLUSSO DI $\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} da$

E PER IL TEOREMA DI GAUSS IL FLUSSO È PARIA $\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$

ADESSO $\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow$ FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO

INOLTRE IN GENERALE IL FLUSSO È PARIA A:

Flusso = (componente normale media) • (area della superficie)

QUINDI $\frac{q}{\epsilon_0} = \underbrace{\vec{E}}_{\substack{\text{COMPONENTE NORMALE MEDIA} \\ \text{FLUSSO CAMPO ELETTROSTATICO}}} \underbrace{4\pi r^2}_{\substack{\text{AREA SUPERFICIE SFERA}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}}$$

PER IL TEOREMA DI STOKES INOLTRE SI HA CHE LA CIRCUITAZIONE È:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{s} = \int_S (\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{\text{ROTORE}}) \cdot \vec{n} da = 0 \quad (\text{FLUSSO DEL ROTORE})$$

$$\text{INFATTI } \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow$$

LEGGE DI COULOMB:

La legge di Coulomb afferma che due cariche puntiformi q_1 e q_2 , poste a distanza r , interagiscono con una forza F , diretta secondo la loro congiungente. La forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

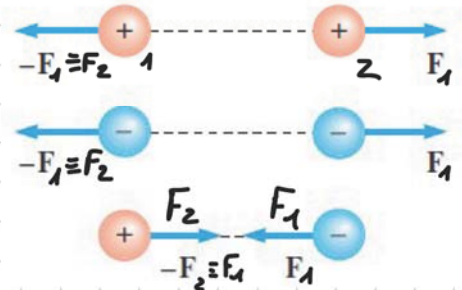
$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{e}_x = \frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{z_2 - z_1}{r}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$



Trattandosi dell'espressione di una forza la legge di Coulomb viene scritta in termini vettoriali. La direzione della forza è quella della retta congiungente le due cariche puntiformi; e indichiamo con $\mathbf{e}$ il versore del vettore $\mathbf{r}$ che va da q_1 a q_2 , cioè il versore uscente dalla carica.

Inoltre le cariche con segno uguale si respingono, mentre cariche con segno opposto si attraggono. Infatti se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno ($q_1 q_2 > 0$), la forza ha lo stesso verso di $\mathbf{e}$, è cioè repulsiva; se invece q_1 e q_2 hanno segno opposto ($q_1 q_2 < 0$), $\mathbf{F}$ ha verso opposto ad $\mathbf{e}$ ed è attrattiva. In accordo con il principio di azione e reazione la forza che q_2 esercita su q_1 è $-\mathbf{F}$.

QUINDI $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$

CASO IN CUI LE CARICHE IN GIOCO SONO PIÙ DI 2:

In presenza di più cariche allora la forza elettrica agente su una carica q è data dalla somma (vettoriale) delle forze dovuta a ciascuna altra carica. Dunque vige il **principio di sovrapposizione**.

CAMPO ELETTROSTATICO:

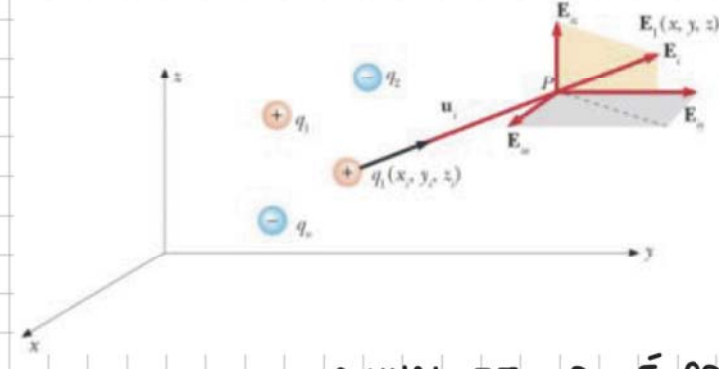
IL CAMPO ELETTROSTATICO RAPPRESENTA LA FORZA PER UNITÀ DI CARICA ED È RAPPRESENTATO DALLA FORMULA: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$

Più precisamente possiamo affermare che il campo elettrostatico prodotto in un punto P da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrostatica risultante F che agisce su una carica di prova q posta in un punto P divisa per la carica q stessa.

QUINDI CONSIDERATA UNA CARICA q_1 , ALLORA IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA ESSA SU UN PUNTO P È DATO DA

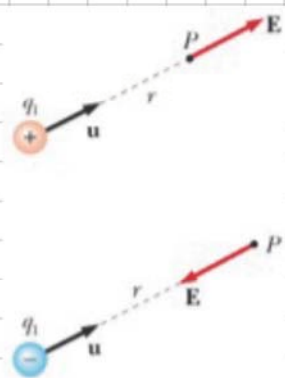
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}^2} \vec{e}_{1P}$$

DOVE $\vec{e}_{1P}$ È IL VERSORE LUNGO LA CONGIUNGENTE TRA LA CARICA E IL PUNTO P.



QUINDI SE q_1 È POSITIVA, ALLORA IL VETTORE $\vec{E}$ È **USCENTE** DA q_1 .

MENTRE SE q_1 È NEGATIVA, ALLORA IL VETTORE $\vec{E}$ È **ENTRANTE** IN q_1 .



DA QUESTE FORMULE SI DEDUCE CHE IL CAMPO GENERATO DA UN SISTEMA DISCRETO DI CARICHE PUNTFORTI È DATO DALLA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI GENERATI DALLE VARIE CARICHE:

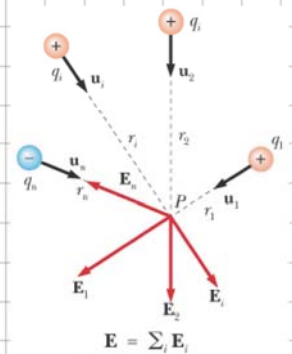
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{r_j^2} \vec{e}_j$$

E LE COMPONENTI CARTESIANE SONO:

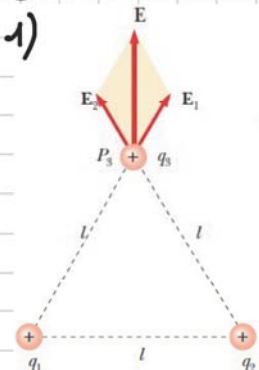
$$E_x(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}}$$

$$E_y(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}}$$

$$E_z(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}}$$



ESEMPIO:

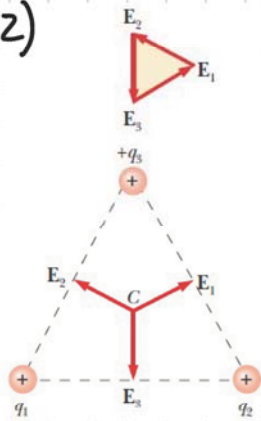


IN QUESTO CASO IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DALLE DUE CARICHE q_1 E q_2 SULLA CARICA q_3 È DATO DALLA SOMMA VETTORIALE TRA IL CAMPO GENERATO DALLA CARICA q_1 E QUELLO GENERATO DALLA CARICA q_2 .

QUINDI

$$E = E_{2y} + E_{1y} = \frac{2q \cos 30^\circ}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

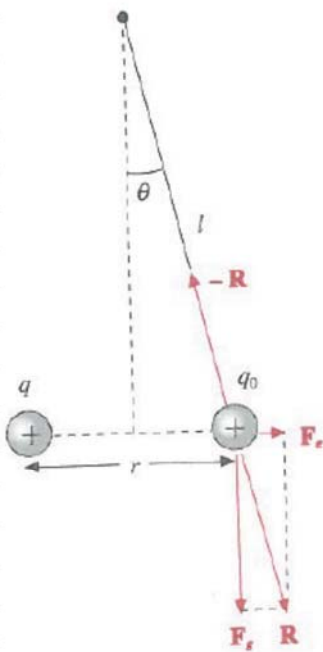
2)



IL CAMPO ELETTRICO AL CENTRO È DATO DALLA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI GENERATI DA LE 3 CARICHE, QUINDI LA RISULTANTE È NULLA

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{0}$$

ESEMPIO CON LA FORZA DI COULOMB:



Una sfera conduttrice, di massa

$m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, possiede una carica

$q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ ed è sospesa ad un filo lungo l . Una seconda sferetta conduttrice con una

carica $q = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ viene avvicinata a q_0 . Quando la distanza tra i centri di q e q_0

vale $r = 5 \text{ cm}$ l'angolo che il filo forma con la verticale vale θ . Calcolare θ .

Soluzione

All'equilibrio

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2 mg}$$

$$\tan \theta = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}$$

$$\tan \theta = 0.1837 \Rightarrow \theta = 10.41^\circ = 0.1817 \text{ rad}$$

$$\text{QUINDI } F_e = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \quad F_g = m \cdot g$$

PER LA LEGGE DEI PENDOLI LA RISULTANTE $\vec{R}$ DEVE ESSERE PARIA ALLA TENSIONE DELLA FUNE:

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2 \cdot m \cdot g}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_e}{F_g}$$

DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA:

Le cariche di interesse nei problemi elettrostatici corrispondono a un numero molto grande di cariche elementari; inoltre nella maggior parte dei casi pratici queste cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

QUINDI SI PARTE DALLA FORMULA $\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_i$

DEFINITA PER LE DISTRIBUZIONI DISCRETE DI CARICA E LA SI ADAPTA ALLA GEOMETRIA CHE VIENE CONSIDERATA E SI EFFETTUA LA SOMMA INFINITESIMALE DI TUTTE LE CARICHE CONTENUTE IN TALE GEOMETRIA. QUINDI LA FORMULA DELLE DISTRIBUZIONI DISCRETE È SOSTITUITA DA:

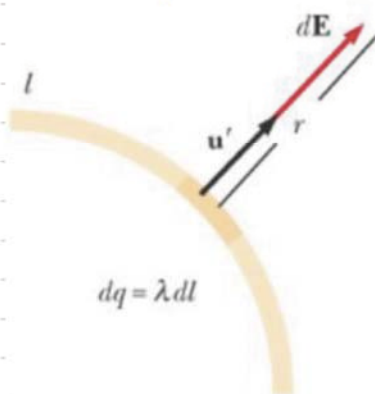
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{SPAZIO CONSIDERATO}} \vec{e} \frac{dq}{r^2} \quad \left[d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]$$

IN BASE ALLA GEOMETRIA CONSIDERATA dq VIENE SOSTITUITA CON:

$dq = \lambda(x', y', z') d\ell$	lineare	$\rightarrow$	$q = \int_{\ell} \lambda(x', y', z') d\ell$	lineare
$dq = \sigma(x', y', z') d\Sigma$	superficiale		$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma$	superficiale
$dq = \rho(x', y', z') d\tau$	volumetrica		$q = \int_{\tau} \rho(x', y', z') d\tau$	volumetrica

$\Downarrow$

Campo elettrostatico di una densità di carica lineare



$$E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} u'$$

ma

$$dq = \lambda(x', y', z') d\ell$$

quindi

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda d\ell}{r^2} u'$$

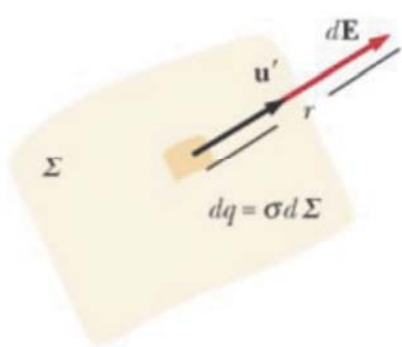
$\lambda = \text{DENSITÀ DI CARICA LINEARE [C/m]}$

$$q = \int_{\ell} \lambda(x', y', z') d\ell$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda d\ell}{r^2} u'$$

$\rightarrow$ INTEGRALE SU LINEA DELLA DENSITÀ DI CARICA LINEARE SU r^2

Campo elettrostatico di una densità di carica superficiale



$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}'$$

ma

$$dq = \sigma(x', y', z') d\Sigma$$

quindi

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma d\Sigma}{r^2} \mathbf{u}'$$

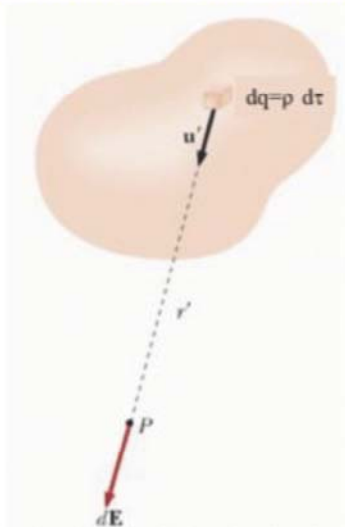
σ = DENSITÀ DI CARICA SPAZIALE
[C/m²]

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma d\Sigma \mathbf{u}'}{r^2}$$

↳ INTEGRALE SU SUPERFICIE DELLA DENSITÀ DI CARICA SPAZIALE SU r^2

Campo elettrostatico di una densità di carica volumetrica



$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}'$$

ma

$$dq = \rho(x', y', z') d\tau$$

quindi

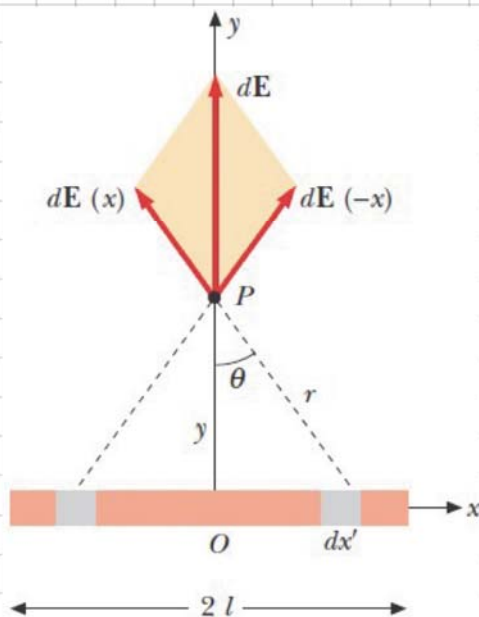
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \mathbf{u}'$$

ρ = DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA

↳ INTEGRALE SU VOLUME DELLA DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA SU r^2

$$q = \int_{\tau} \rho(x', y', z') d\tau$$

ESEMPIO 1.6 (MAZZOLI P. 16) DENSITÀ LINEARE



Un filo di lunghezza $2l$, parallelo all'asse x , possiede una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Calcolare il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ nei punti dell'asse del filo (asse y). Dedurre l'espressione del campo anche per un filo infinitamente lungo e uniformemente carico.

SOLUZIONE:

LA DENSITÀ DI CARICA TOTALE SUL FILO È DATA DA:

$$\lambda = \frac{q_{\text{tot}}}{2l} \Rightarrow dq = \lambda \cdot dx'$$

QUINDI IL CAMPO INFINITESIMO È DATO DA:
$$d\vec{E} = \frac{\lambda \cdot dx'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

DOVE $\vec{u}$ È IL VETTORE DIRETTO DA dx' ELEMENTO INFINITESIMO DI CARICA AL PUNTO P.

DAL MOMENTO CHE DATO UN ANGOLO ESISTE UN PUNTO
DI FILO INFINITESIMO SIMMETRICO, ADORA DEVO MOLTIPLICARE PER z :

$$d\vec{E} = \frac{z\lambda \cdot dx'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \overset{\text{VERSORE ASSE } y}{\cos\theta} \hat{y} \quad \text{N.B: } x' = l$$

• r VARIA IN BASE ALL'ANGOLO θ

$$r = y \cdot \frac{1}{\cos\theta} \quad x' = y \cdot \tan\theta \quad dx' = y \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{z\lambda \cdot y \cdot \cancel{\cos^2\theta}}{4\pi\epsilon_0 y^2 \cancel{\cos^2\theta}} \cos\theta \hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \cos\theta \hat{y}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \hat{y}}{2\pi\epsilon_0 y} \int_0^{\theta_1} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda \hat{y}}{2\pi\epsilon_0 y} \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} = \frac{\lambda \hat{y}}{2\pi\epsilon_0 y} \sin\theta_1$$

DUNQUE: PRENDENDO COME LUNGHEZZA DI MEZZO FILO l

$$l = r \cdot \sin\theta_1 \quad r = \sqrt{l^2 + y^2}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}} \Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\lambda \cdot l}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{l^2 + y^2}} \hat{y} = \frac{q_{TOT}}{2l} \cdot \frac{l}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{l^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = \frac{q_{TOT}}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}}}$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO:

Si definisce **Forza Elettrica** quella che agisce su una carica elettrica Q . Tale forza può essere di qualsiasi natura (es. associata a processi chimici o meccanici, o elettrostatica), ma si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico E , detto "**campo elettromotore**", generato da un'altra carica q .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

[DA ANALISI II]

LAVORO DI UN CAMPO VETTORIALE:

Si dice lavoro di un campo vettoriale il suo integrale curvilineo di seconda specie.

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{DOVE } \gamma \text{ È UNA CURVA E } \vec{F} \text{ UN CAMPO VETTORIALE.}$$

LAVORO DI UN CAMPO CONSERVATIVO: SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

UNA CURVA REGOLARE A TRACCI, E SIA $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ UN CAMPO CONSERVATIVO

CIOÈ $\vec{F} = \nabla \phi$. IL LAVORO DI F LUNGO γ È:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})$$

$\vec{B} = \gamma(b)$ PUNTO FINALE
 $\vec{A} = \gamma(a)$ PUNTO INIZIALE

↳ LAVORO DI F LUNGO γ

DOVE ϕ È UNO SCALARE

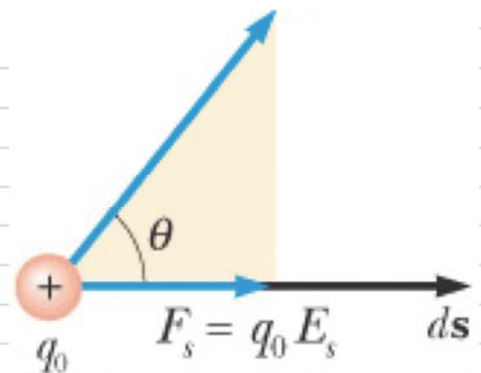
Il lavoro della forza elettrica per uno spostamento infinitesimo ds si ottiene come:

$$dW_1 = F \cdot ds$$

$$dW_1 = q_0 E \cdot ds = q_0 E \cos \theta ds$$

Invece il lavoro del campo elettrostatico è:

$$W = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{CON } W = Q \cdot \phi$$



ESSENDO IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ UN CAMPO CONSERVATIVO, ALLORA IL LAVORO SVOLTO DA $\vec{E}$ LUNGO LA CURVA γ , CHE VA DAL PUNTO A AL PUNTO B È DATO DA:

$$W = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -(\phi(B) - \phi(A))$$

QUINDI ESISTE IL CAMPO SCALARE ϕ TALE PER CUI L'INTEGRALE CURVILINEO DEL CAMPO ELETTROSTATICO DA A $\rightarrow$ B È DATO DA $\phi(B) - \phi(A)$.