Centro Stampa

N° 4488

BIOMECCANICA DEI FLUIDI
TEORIA 2022-23

DI CASARI SILVIA

BIOMECCANICA DEI FLUIDI

— Teoria —

Docente: Umberto Morbiducci
A.A. 2022/2023

Appunti di Casari Silvia

Politecnico di Torino

Sommario

Chiastra - 27/09/2022

IDROSTATICA

Generalità sui fluidi

Fluido: definizione

È un mezzo continuo nel quale, in equilibrio, gli sforzi sono sempre normali alle rispettive superfici, ovvero è un mezzo che non può sopportare sforzi di taglio senza deformarsi per scorrimento.

Quindi, se applichiamo sforzi di taglio a un fluido, questo si deforma per scorrimento e si perde la condizione di equilibrio: non si è più in condizioni statiche perché c'è un moto → condizioni dinamiche.

I fluidi in equilibrio sono in grado di sopportare sforzi normali, ma non tangenziali (in quanto sforzi di taglio inducono una deformazione e si perderebbe l'equilibrio).

Proprietà dei fluidi

– *Densità (o massa volumica):*

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\left[\frac{kg}{m^3}\right] \quad nel\ SI$$

$$\left[\frac{g}{cm^3}\right] = 10^3\,\frac{kg}{m^3} \quad nel\ c.g.s.$$

Se si considera $1m^3$ di olio e $1m^3$ di piombo, avrà massa maggiore il piombo, in quanto ha una densità maggiore.

Se si considera $1\ kg$ di olio e $1\ kg$ di piombo, avrà volume maggiore l'olio, perché ha una densità minore.

✓ In generale, per i liquidi **la densità è costante, non dipende da altre caratteristiche fisiche**. Ci sono solo poche eccezioni, come ad esempio l'olio che, se riscaldato, perde un po' di densità. Se $\rho = cost$ il fluido è definito *incomprimibile* o *incompressibile*. L'acqua e il sangue sono incomprimibili, hanno una densità costante che non varia col variare di altri parametri fisici.

Liquidi: ρ varia poco con temperatura e pressione → $\rho = cost$

✓ Per i gas, il rapporto tra massa e volume può variare al variare di altri parametri fisici.

Gas: ρ dipende strettamente da altre grandezze → $\rho(T, p)$.

Come varia la densità di un gas? Si consideri l'equazione di stato dei gas ideali:

$$pV = nRT$$

p → pressione

V → volume

n → numero di moli

R → costante universale dei gas

$$n = \frac{m}{M}$$

m → massa
M → peso molecolare

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

Quindi, nei gas ideali la densità varia in modo direttamente proporzionale alla pressione e in modo inversamente proporzionale alla temperatura.

– *Peso specifico*

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

$P = mg$ → peso del corpo

$$\left[\frac{N}{m^3}\right] \quad nel\ SI$$

$$\left[\frac{dyn}{cm^3}\right] = 10\frac{N}{m^3} \quad nel\ c.g.s.$$

- *Comprimibilità (modulo di comprimibilità o modulo di elasticità di volume)*

  Esprime quanto varia il volume a causa di una variazione di pressione.

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}}$$

  Il segno – tiene conto del fatto che a variazioni di pressione positive (quando la pressione aumenta) il volume diminuisce → variazioni discordi.

$$[Pa] \quad nel\ SI$$

$$\left[\frac{dyn}{cm^2}\right] = 0.1\ Pa \quad nel\ c.g.s.$$

  Talvolta si usa il suo inverso:

$$\beta = \frac{1}{E}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{E}dp = -\beta dp$$

$$\beta = -\frac{\frac{dV}{V}}{dp}$$

$$\left[\frac{1}{Pa}\right] \quad nel\ SI$$

- *Coefficiente di dilatazione di volume*

$$\alpha_v = \frac{\frac{dV}{V}}{dT}$$

  Queste variazioni sono concordi: a un aumento di temperatura corrisponde un aumento di volume. Si noti che α e β hanno la stessa definizione, a meno del segno e del cambio di variabile: una relativa alle variazioni di pressione e una relativa alle variazioni di temperatura.

$$\left[\frac{1}{°C}\right] \quad nel\ SI$$

  Tipicamente, i liquidi si dilatano al crescere della temperatura $(\rho\downarrow)(V\uparrow)$, tranne l'acqua tra $0°C$ e $4°C$, quando prima si formano dei cristalli di ghiaccio e poi ghiaccia completamente. Succede infatti che si dilata al diminuire della temperatura, al contrario degli altri liquidi. Perciò, in tale intervallo di temperature, l'acqua avrà un coefficiente di dilatazione di volume negativo, mentre altrove è positivo.

Per quanto riguarda i gas, bisogna specificare la natura della trasformazione che lega la pressione al volume. In buona approssimazione, un gas in condizioni isoterme segue la **legge di Boyle**.

$$pV = cost \qquad \text{LEGGE DI BOYLE}$$

Svolgiamo le derivate di questa uguaglianza:

$$d(pV) = d(cost)$$

$$dpV + pdV = 0$$

Ci riportiamo alla definizione di E:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad E = p$$

Quindi, per un gas, il modulo di comprimibilità E è pari alla pressione p stessa. I gas si comprimono molto facilmente in rapporto $1 : 1$ rispetto alla pressione.

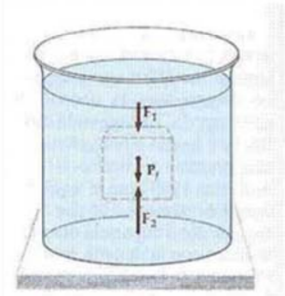
Esistono dunque delle differenze tra liquidi e gas, ma comunque si può racchiudere la descrizione del comportamento di entrambi con una trattazione generale dei fluidi. Tratteremo quindi le proprietà in maniera unificata.

Come detto, i fluidi non possono resistere allo scorrimento: non esiste una forza di attrito che compensi gli sforzi di taglio ed eviti che si generi uno scorrimento. La diretta conseguenza è che se un fluido è in quiete, gli sforzi possono solo essere normali alle superfici di separazione perché se ci fossero sforzi di taglio, allora si avrebbero deformazioni per scorrimento.

Pressione

Quando una forza esterna è applicata, allo scorrimento del fluido si oppone una forza di attrito interno. Tuttavia, **il fluido non può resistere allo scorrimento**, cioè non esiste una forza d'attrito statico che determini una situazione di equilibrio. Dunque, quando una forza esterna è applicata, una forza di taglio genera dello scorrimento.

Consideriamo il fluido in figura e ne isoliamo una porzione (quella tratteggiata) che sarà caratterizzata da una porzione di massa dm infinitesima. In condizioni di equilibrio esistono delle forze normali che si bilanciano.



Sull'elemento agiscono 2 tipi di forze:

- **Forze di volume (a distanza)** → agiscono sull'intera massa di fluido, sono proporzionali al volume e sono applicate nel baricentro (forza peso $\vec{P}$, forza di natura elettrica o elettromagnetica, ecc.)
- **Forze di superficie (a contatto, legate alla pressione)** → agiscono sulla superficie del fluido, sono proporzionali all'area della superficie e sono normali alla superficie.

Vediamole più nel dettaglio.

Essendo dm un elemento dotato di massa, su di esso agirà una forza peso:

$$\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho\, dV \vec{g}$$

La forza peso è direttamente proporzionale al volume → forza di volume

La porzione di fluido è in equilibrio, quindi le forze si bilanceranno; se questo non succede e c'è una forza risultante, ci sarà anche un'accelerazione e dunque si ha moto e non più equilibrio. La forza di volume è bilanciata dalle forze di superficie $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, con risultante $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$, che sono proporzionali alle superfici su cui agiscono in direzione alla superficie (equilibrio mantenuto).

$$\vec{F} = p\,\vec{S}$$

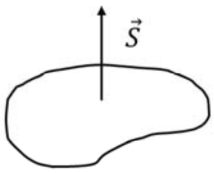
$\vec{S}$ → normale alla superficie; ha modulo pari all'area della superficie

p → scalare che moltiplicato per la superficie (vettore superficie) dà come risultato una forza $\vec{F}$ che equilibra la forza peso; è detta pressione

Queste forze che equilibrano la forza peso sono dette forze di superficie.

Bilancio di forze:

$$\vec{P} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$



Si consideri ora una superficie arbitraria come quella in figura a lato.

$\vec{S} \perp$ $superficie$

$|\vec{S}| = area\ della\ superficie$

Per ogni superficie si può dire che la forza esercitata sulla superficie è:

$$\vec{F} = p\,\vec{S}$$

E la pressione, per ogni superficie, vale:

$$p = \frac{|F|}{|S|} = \frac{|F|}{area}$$ **PRESSIONE**

Questa definizione vale anche in termini infinitesimi:

$$p = \frac{dF}{dS}$$

e vale anche se $dS \to 0$ → la superficie collassa in un punto

<u>La pressione è una funzione scalare del punto.</u>

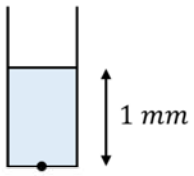
Dato che la definizione è estendibile a qualunque superficie, la definizione vale anche per superfici che tendono a zero e collassano in un punto. Per cui, nonostante la prima definizione fosse legata a una superficie, è una funzione scalare del punto e ci si può svincolare dalla definizione di una superficie.

Unità di misura:

$$[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] \quad nel\ SI$$

$$1\ bar = 10^5\ Pa \approx pressione\ atmosferica$$

In ambito medico si utilizza spesso il millimetro di mercurio ($mmHg$) che è definito come la pressione esercitata da una colonnina di mercurio alta $1\ mm$. La pressione viene misurata sul fondo della colonnina. Si ha che:



$$1\ mmHg = 133.32\ Pa$$

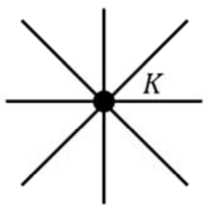
Viene utilizzato perché consente una più semplice lettura/memorizzazione dei dati medici. Ad esempio, la pressione arteriosa varia tra $80 - 120\ mmHg$, che è più facile da memorizzare, piuttosto che $10\ 665.6\ Pa$.

$$\left[\frac{dyn}{cm^2}\right] = 0.1\ Pa \quad nel\ cgs$$

Talvolta si può trovare il psi (pound square inch, libbre per pollice quadrato) [non serve sapere la conversione]:

$$1\ psi = 6894.76\ Pa$$

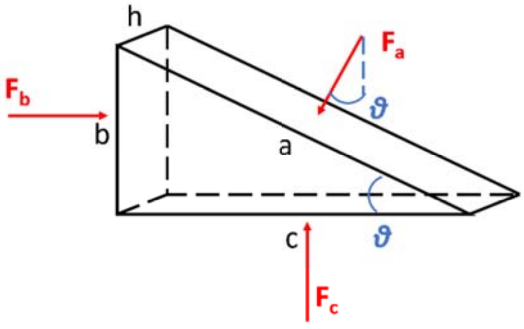
In equilibrio la pressione è una proprietà puntuale → tutti gli elementi di superficie che passano per uno stesso punto avranno la stessa pressione, qualunque sia l'orientazione della superficie.



Considerato un generico punto K nello spazio, il valore di pressione non cambia se si considerano superfici orientate in differenti direzioni (come mostrato in figura a sinistra), in quanto è un valore associato a un punto ed è una <u>variabile scalare</u>. La direzionalità e l'area della superficie sono invece date dal vettore $\vec{S}$. Questa proprietà è nota come **non direzionalità della pressione** (→ variabile scalare, proprietà puntuale).

Si dimostra in maniera rigorosa la non direzionalità della pressione.

Dimostrazione: Non direzionalità della pressione



Consideriamo un elemento arbitrario di fluido di forma prismatica e facciamo l'equilibrio delle forze trascurando quelle di volume.

In equilibrio si ha:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

$$Eql \mid \qquad F_c = F_a cos\vartheta$$

$$Eql - \qquad F_b = F_a sin\vartheta$$

$$F_a = p_a\, a\, h$$

$$F_b = p_b\, b\, h$$

$$F_c = p_c\, c\, h$$

$$c = a\ cos\vartheta$$

$$b = a\ sin\vartheta$$

$$Eql - \qquad p_b\, b\, h = p_a\, a\, h\, sin\vartheta$$

$$p_b\, \cancel{a\, sin\vartheta\, h} = p_a\, \cancel{a\, h\, sin\vartheta}$$

$$p_b = p_a$$

$$Eql \mid \qquad p_c\, c\, h = p_a\, a\, h\, cos\vartheta$$

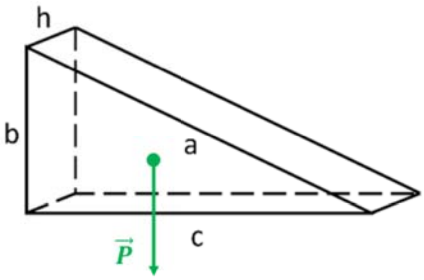
$$p_c\, \cancel{a\, cos\vartheta\, h} = p_a\, \cancel{a\, h\, cos\vartheta}$$

$$p_c = p_a$$

Dunque, si ha che:

$$p_a = p_b = p_c$$

Si può, quindi, concludere che **la pressione non dipende dall'orientazione delle superfici**. Abbiamo dimostrato la non direzionalità della pressione. Si può parlare di pressione in un generico punto K senza specificare la superficie sulla quale la pressione agisce.



Consideriamo ora la presenza di forze di volume (forza peso).

L'equilibrio verticale includerà anche la forza peso:

$$Eql \mid \qquad F_c = F_a cos\vartheta + \rho V g$$

stiamo considerando un volume arbitrario, quindi queste considerazioni valgono anche per un prisma infinitamente piccolo, ovvero in cui $V \to 0$ e quindi $a, b, c, h \to 0$.

$$p_c\, c\, h = p_a\, a\, h\, cos\vartheta + \rho \underbrace{\frac{1}{2} bch}_{V}\, g$$

$$\lim_{V\to 0}(p_c\, c\, h) = \lim_{V\to 0}\left(p_a\, a\, h\, cos\vartheta + \rho\frac{1}{2}bch\, g\right)$$

$$\lim_{a,b,c,h\to 0}(p_c\, c\, h) = \lim_{a,b,c,h\to 0}\left(p_a\, a\, h\, cos\vartheta + \rho\frac{1}{2}\cancel{bch}\, g\right)$$

$V = o(S)$
Il volume è un o piccolo della superficie, quindi tende a zero più velocemente della superficie → è di un ordine di infinitesimi inferiore

Nell'equazione il termine legato al volume tende a 0 più velocemente degli altri (dato che è un termine elevato alla terza, mentre gli altri sono elevati alla seconda) e nel passaggio al limite è trascurabile (è un o piccolo di Landau), si riottiene dunque la stessa equazione che esprime l'uguaglianza tra le pressioni. La presenza dei termini di volume è perciò trascurabile nella dimostrazione della non direzionalità della pressione.

Si può quindi dedurre che $p_c = p_a$ anche considerando le forze di volume: **p è non direzionale anche in presenza di forze di volume**.

Forze di superficie e forze di volume

Per definizione di equilibrio, in equilibrio sono presenti forze di superficie $(\vec{F}_p)$ e forze di volume $(\vec{F}_v)$ e la risultante delle forze agenti è $= 0$.

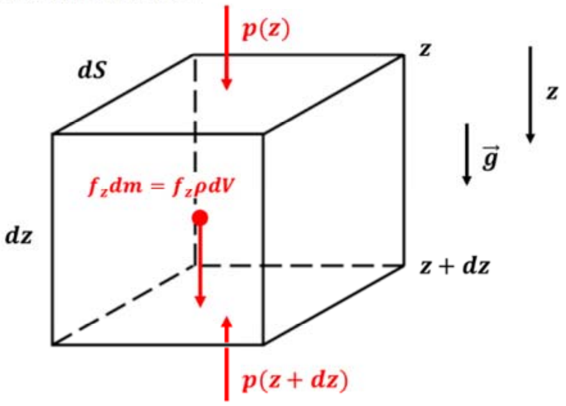
$$\vec{F}_p + \vec{F}_v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_p = -\vec{F}_v$$

uguali in modulo, opposte in segno/direzione

In un fluido statico, la pressione varia lungo la direzione delle forze di volume (forza peso), **quota** (direzione definita da $\vec{g}$, lungo l'asse verticale).

Dimostrazione

Dettagliamo la relazione tra forze di superficie e di volume. Consideriamo un volumetto di fluido in cui sono presenti entrambe le forze.



f_z → componente di $\vec{g}$ lungo $\hat{k}$ (versore dell'asse z); ($f_z = g$ nel nostro caso)

dS → area della base

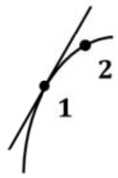
dz → spessore

$$dV = dz\, dS$$

$$Eql \mid \qquad p(z)\, dS - \underbrace{p(z+dz)}\, dS + f_z\, \rho\, dV = 0$$

Sostituiamo lo sviluppo in serie di Taylor, fermandoci al primo ordine:

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz$$



Si vuole conoscere il valore della funzione in 2. Lo si approssima come il valore della funzione in 1 $(p(z))$ + il valore della derivata (che esprime il coeff. angolare della retta tangente in 1) per la distanza tra 2 e 1. In sostanza si approssima linearmente il tratto tra 1 e 2.

Si ha quindi:

$$p(z)\cancel{dS} - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right] \cancel{dS} + f_z\, \rho\, dz\, \cancel{dS} = 0$$

∂ derivate relativa perché la pressione potrebbe dipendere da altre variabili

$$\cancel{p(z)} - \cancel{p(z)} - \frac{\partial p}{\partial z} dz + f_z\, \rho\, dz = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cancel{dz} + f_z\, \rho\, \cancel{dz} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_z\, \rho$$

La dipendenza è proporzionale alla densità ρ e alla componente f_z di g lungo la direzione che si sta considerando (in questo caso è z).

Analogamente, in tutte le direzioni si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x\, \rho \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y\, \rho \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z\, \rho$$

Nel caso in questione:

$$f_x = 0 \qquad f_y = 0 \qquad f_z = g \qquad \frac{dp}{dz} = \rho\, g$$

d derivata completa perché è l'unica variabile lungo cui varia la pressione

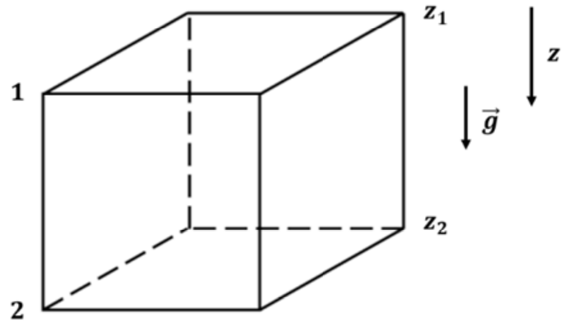
In termini vettoriali:

$$\nabla p = grad\ p = \rho\, \vec{f}$$

Superfici alla stessa quota hanno la stessa pressione.
Quanto mostrato ora è espresso in termini infinitesimi.

In termini finiti, invece, si ha:

$$f_x = 0$$
$$f_y = 0$$
$$f_z = g$$
$$\frac{dp}{dz} = \rho\, g \qquad \Rightarrow \qquad \int_1^2 \dots$$
$$\int_1^2 \frac{dp}{dz} = \int_1^2 \rho g$$



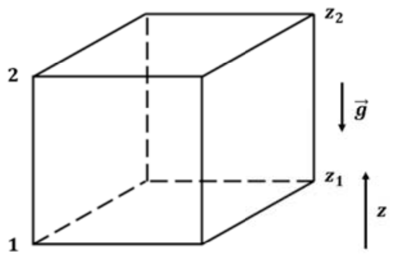
$$\int_1^2 dp = \int_1^2 \rho g\, dz$$
$$p_2 - p_1 = \rho g (z_2 - z_1)$$

Si sa che **la pressione aumenta con l'abbassarsi della quota** perché aumenta il peso della porzione di liquido. Nel caso sopra, dato che $\vec{g}$ è diretta dall'alto verso il basso, la pressione è maggiore in 2. Verificando l'equazione scritta sopra si ha che:

$$(z_2 - z_1) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 > p_1$$

Quindi la faccia che sta più in basso ha una pressione maggiore.

Se invece si considerasse l'asse z diretto verso l'alto:



$$f_z = -g$$
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Integrando si ottiene:

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

In questo caso:

$$(z_2 - z_1) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 < p_1$$

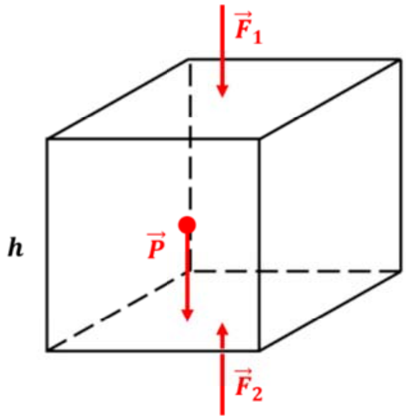
Bisogna quindi fare sempre attenzione agli assi: un asse discorde con l'accelerazione di gravità introduce un segno – (dovuto al fatto che $\vec{g}$ e z sono discordi). Il risultato è sempre lo stesso: **la faccia in basso ha una pressione maggiore!**

Leggi fondamentali dell'idrostatica (in equilibrio)

Si procede ora con la trattazione delle tre leggi fondamentali dell'idrostatica, partendo in ognuno dei casi con l'enunciazione della legge e in seguito con la sua dimostrazione, terminando con alcune possibili applicazioni tecniche.

1) Legge di Stevino

In un fluido pesante (cioè è soggetto sia a forze di volume che di superficie) la differenza di pressione tra due punti del fluido è direttamente proporzionale al dislivello tra i due punti.



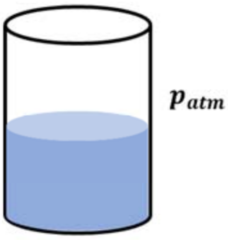
Dimostrazione

$$Eql \,|\qquad F_2 = F_1 + P$$
$$p_2 h^2 = p_1 h^2 + \rho g\, h^3$$
$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

Si può osservare che:

- La pressione aumenta andando verso il basso in maniera proporzionale alla densità ρ → pressione aumenta in funzione del fluido considerato
- Se due punti si trovano alla stessa quota (stesso livello orizzontale) avranno pressioni uguali.

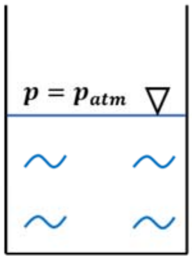
Si possono fare alcune considerazioni. Consideriamo un recipiente pieno di liquido:



All'interfaccia tra liquido e gas, ovvero alla superfice di separazione tra acqua e aria sovrastante, tutti i punti a contatto con l'aria avranno la stessa pressione, che è quella atmosferica p_{atm}.

L'interfaccia è orizzontale → stessa quota

L'interfaccia liquido/aria è chiamata **superficie libera** o **pelo libero** e si indica con un triangolino rovesciato ∇. Sulla superficie su cui punta il triangolino, la pressione è quella atmosferica.



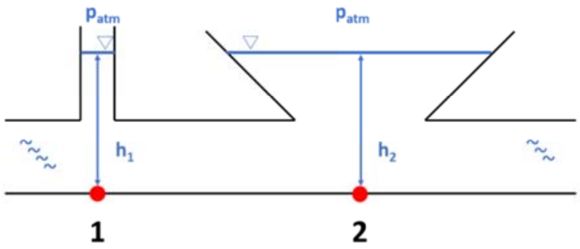
Quindi, la legge di Stevino dice che c'è una relazione biunivoca tra quota e pressione:

$$stessa\ quota \iff stessa\ pressione$$
$$stessa\ pressione \iff stessa\ quota$$

Chiastra - 03/10/2022

Corollari, conseguenze e applicazioni della legge di Stevino

✓ Principio dei vasi comunicanti



In un sistema di vasi comunicanti il liquido contenuto in essi raggiunge la stessa quota indipendentemente dalla forma dei recipienti.

Le superfici libere sono alla stessa pressione $p_0 = p_{atm}$ → il dislivello tra esse è nullo.

Sul fondo del vaso 1 si ha una pressione p_1 che sarà uguale alla pressione sul fondo del vaso 2: $p_1 = p_2$.

Dimostrazione

Dimostro che le superfici libere sono alla stessa quota indipendentemente dalla forma del recipiente.

Per assurdo si suppone che:

$h_1 \neq h_2 \qquad h_D = h_2 - h_1 \neq 0$

Applico Stevino per il recipiente a sinistra e per quello a destra:

> NB: $p_0 = p_{atm}$ perché 0 è il riferimento. Si calcola la pressione dal riferimento della pressione atmosferica.

$p_1 = p_0 + \rho g h_1$

$p_2 = p_0 + \rho g h_2 = p_0 + \rho g(h_D + h_1)$

$p_1 - p_2 = -\rho g h_D$

Tuttavia, so che $p_1 = p_2$ (stessa quota), quindi:

$h_D = 0$

Si conclude che **non esiste una differenza di quota tra le superfici libere.**

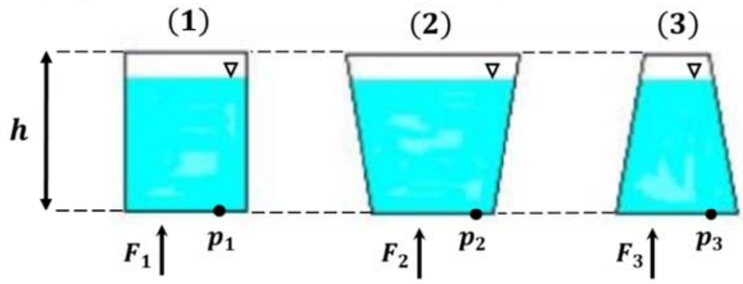
✓ Paradosso idrostatico

In recipienti con forma diversa, se l'altezza è la stessa, la pressione sul fondo di tutti i recipienti è la stessa.

$p_1 = p_2 = p_3 = p \qquad A_1 = A_2 = A_3$

$F_p = pA \qquad P_1 = \rho g h A_1$

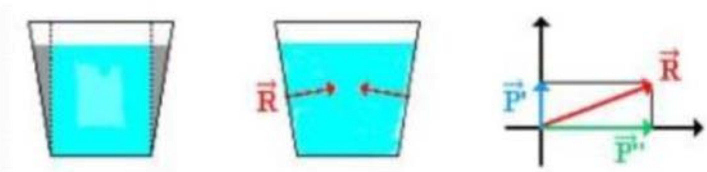
$eql \mid \quad F_p = F_V = P_1$



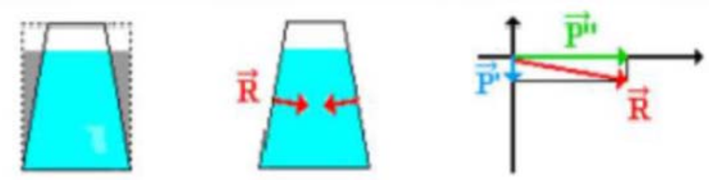
Le basi dei tre recipienti hanno la stessa area, allora anche le forze di superficie applicate al fondo sono uguali nonostante il volume (e quindi il peso) del fluido sia diverso nei tre casi.

$$F_1 = F_2 = F_3$$

Questo è ciò che viene denominato "paradosso" idrostatico, il quale può essere compreso analizzando meglio il bilancio delle forze applicate sui tre recipienti.



Nel caso (2) sono presenti anche altre forze, esercitate dalle pareti, che contribuiscono a sorreggere il peso della colonna di fluido. In particolare, la normale alla superficie laterale $\vec{R}$ ha una componente verticale $\vec{P'}$ che sorregge la colonna di fluido, sommandosi alla forza peso della colonna di fluido rettangolare colorata in azzurro e rendendo così le forze esercitate sul fondo nel caso (1) e (2) uguali → $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$.

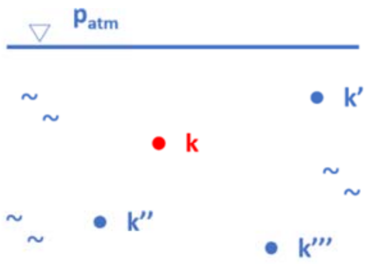


Nel caso (3) invece, complementare alla situazione (2), dato che la colonna di fluido è minore, verrà esercitata dalle pareti laterali una forza supplementare $\overrightarrow{P'}$ in modo tale che la forza esercitata sul fondo, equilibrata dalla forza di pressione $\vec{F}_3$, sia pari a $\vec{F}_1$.

La pressione dipende, quindi, solo dalla quota; muovendoci lungo la quota, la porzione di fluido soprastante è sempre la stessa. I volumi e i pesi dei contenitori possono sembrare fuorvianti, ma come si è visto, in un caso le pareti laterali del recipiente esercitano forze sul fluido, nell'altro no. In questo modo, i bilanci si equilibrano.

2) Principio di Pascal

Qualsiasi variazione di pressione esterna si trasmette uniformemente a tutti i punti di un fluido in equilibrio.



Dimostrazione

Consideriamo un fluido e un punto generico k.

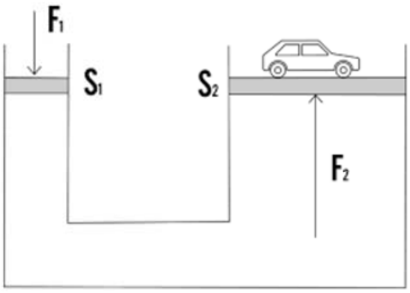
$\forall k \qquad p_k = p_0 + \rho g h$

La pressione p_0 compare nelle equazioni della pressione per qualsiasi punto k appartenente al fluido, risulta quindi necessario che qualsiasi variazione di p_0 si trasmetta uniformemente su tutte le pressioni di tutti i punti del fluido, indipendentemente dalla quota.

Corollari, conseguenze e applicazioni del principio di Pascal

- ✓ **Freno idraulico**
  Premendo il pedale del freno si causa una variazione della pressione esterna che si trasmette a tutti i punti del fluido dell'impianto frenante, fino al termine del circuito dove verrà esercitata una forza sul tamburo del freno che causa, grazie all'attrito, il rallentamento del mezzo.

- ✓ **Elevatore idraulico**
  Consta principalmente di due parti, una a sezione molto grande su cui si trova il peso che si vuole sollevare e una a sezione più piccola dove viene applicata la forza necessaria al sollevamento dell'oggetto. Le due parti sono interconnesse tra di loro da un circuito idraulico riempito di fluido. Esercitando una forza $\vec{F}_1$ si genera una pressione che si trasmette uniformemente a tutto il circuito.



Perciò deve valere la seguente equazione che eguaglia le pressioni nel punto 1 e 2:

$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1} \qquad F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1 \qquad S_2 \gg S_1 \Rightarrow F_2 \gg F_1$

Amplificazione della forza!

$p_2 = p_1$

Per il principio di Pascal la pressione si trasmette uniformemente.

Permette, dunque, di amplificare la forza, ma si ha una perdita in spostamento (poiché $V = cost$) → sono necessari grandi spostamenti in 1 per ottenere dei piccoli spostamenti in 2.

✓ Manometro a U

Se la pressione agente sulle superfici libere è la stessa, allora le due superfici sono alla stessa quota, non c'è dislivello Fig.(a).

Liquidi miscibili

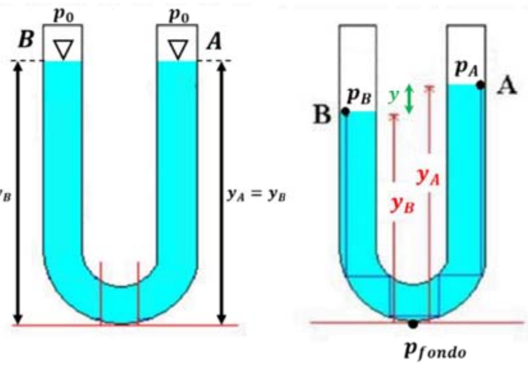
Se i due rami comunicano con ambienti diversi (a diversa pressione p_A e p_B), si può produrre un dislivello Fig.(b).

Applico Stevino:

$$p_{fondo} = p_B + \rho g y_B = p_A + \rho g y_A$$

$$p_B - p_A = \rho g \underbrace{(y_A - y_B)}_{= y \ (dislivello)}$$

Nota $p_A(= p_{atm})$ e noti la densità ρ e il dislivello y, si può calcolare la pressione in B.



(a) (b)

Liquidi non miscibili

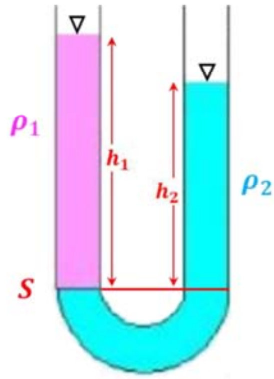
$$\rho_1 < \rho_2$$

Applico Stevino per i due liquidi, lungo la superficie di separazione:

$$Lungo\ S:$$

$$fluido\ 1\ (ramo\ sinistro) \qquad p_S = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$fluido\ 2\ (ramo\ destro) \qquad p_S = p_0 + \underbrace{\rho_2 g h_2}_{= p_2\text{, ovvero l'altezza raggiunta dal fluido 2 nel ramo a destra}}$$



$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Due liquidi non miscibili in vasi comunicanti raggiungono altezze inversamente proporzionali alla loro densità. Si può calcolare la densità ρ di un fluido ignoto isolando la variazione di h dei due peli liberi.

Se, ad esempio, ρ_2 è acqua, si può calcolare la densità del fluido ignoto:

$$\rho_1 = \rho_2 \frac{h_2}{h_1}$$

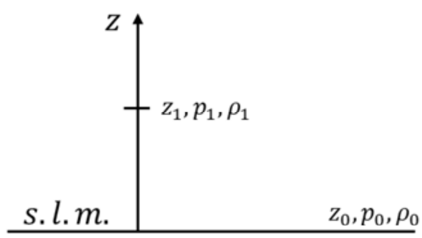
✓ Variazione della p_{atm} alla variazione della quota

Si procede ora presentando un'applicazione della legge di Pascal ai gas, che consiste nel valutare la legge che descrive la diminuzione di pressione con l'aumentare della quota atmosferica.

Consideriamo un gas; in condizioni isoterme vale la legge di Boyle:

$$T = cost \implies pV = cost \implies \frac{p}{\rho} = cost$$

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad V = \frac{m}{\rho}$$



Sul livello del mare (s.l.m.):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \implies \rho = \frac{p}{p_0}\rho_0$$

Equazione statica dei fluidi:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$