Centro Stampa

N° 4453

FISICA 2
TEORIA ESERCIZI 2022-23

DI VICO GIULIA

RIASSUNTO DELLE PRINCIPALI EQUAZIONI di ELETTROSTATICA e MAGNETOSTATICA

Vuoto

FLUSSO di $\vec{E}$ (GAUSS): $\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$ — DIVERGENZA di $\vec{E}$: $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

FLUSSO di $\vec{B}$: $\oint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0$ (SOLENOIDALE) — DIVERGENZA di $\vec{B}$: $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

CIRCUITAZIONE di $\vec{E}$: $\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ (CONSERVATIVO) — ROTORE di $\vec{E}$: $\nabla\wedge\vec{E} = 0$

CIRCUITAZIONE di $\vec{B}$ (AMPERE): $\oint_\ell \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ — ROTORE di $\vec{B}$: $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Mezzi

RELAZIONI COSTITUTIVE: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ $\qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

FLUSSO di $\vec{E}$ (GAUSS): $\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_{lib} + q_{pol}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r} q_{lib}$ — DIVERGENZA di $\vec{E}$: $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{lib} + \rho_{pol})$

FLUSSO di $\vec{D}$ (GAUSS): $\oint_\Sigma \vec{D}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = q_{lib}$ — DIVERGENZA di $\vec{D}$: $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{lib}$

CIRCUITAZIONE di $\vec{B}$ (AMPERE): $\oint_\ell \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_{mag}) = \mu_0\mu_r I$ — ROTORE di $\vec{B}$: $\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{j} = \mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}_m)$

CIRCUITAZIONE di $\vec{H}$ (AMPERE): $\oint_\ell \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I$ — ROTORE di $\vec{H}$: $\nabla\wedge\vec{H} = \vec{j}$

Continuità

COMPONENTI TANGENZIALI: $E_{1t} = E_{2t}$; $H_{1t} = H_{2t}$; $\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$; $\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$

COMPONENTI NORMALI: $D_{1n} = D_{2n}$; $B_{1n} = B_{2n}$; $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$; $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$

Equazioni di Maxwell nel vuoto

FORMA INTEGRALE

$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$ GAUSS $\qquad \oint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0$ (SOLENOIDITÀ) $\qquad$ DENSITÀ di ENERGIA: $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

$\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$ FARADAY $\qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I^{conc.} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$ $\qquad u_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2$

FORMA DIFFERENZIALE

$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad$ CONTINUITÀ della CORRENTE: $\nabla\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ FARADAY $\qquad \nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\qquad$ LEGGE di OHM: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

MATERIALI

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$ $\qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad$ DENSITÀ di ENERGIA: $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\,\vec{D}$

$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \nabla\wedge\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

EQUAZIONI COSTITUTIVE $\qquad u_m = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ $\qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ $\qquad$ MEZZI ISOTROPI

$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $\qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

FORMULARIO

CAMPO MAGNETICO nel VUOTO

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$ e $\boxed{\oint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = 0}$ — II EQ. MAXWELL — $\vec{B}$ è SOLENOIDALE

$\nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ e $\boxed{\oint_\ell \vec{B}\cdot d\vec{s} = \pm\mu_0 I_e}$ — IV EQ. MAXWELL — LEGGE di AMPERE (STAZIONARIA)

CAMPO ELETTRICO NEL VUOTO

$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ e $\boxed{\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$ — I EQ. di MAXWELL — GAUSS

$\nabla\wedge\vec{E} = 0$ e $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ — $\vec{E}$ è CONSERVATIVO

$$\left.\begin{aligned} d\vec{F} &= I\, d\vec{s}\wedge\vec{B} \\ d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I\, d\vec{s}\wedge\vec{u}_r \end{aligned}\right\}$$ LEGGI ELEMENTARI di LAPLACE

$\vec{B}$ < CONDUZIONE / MAGNETIZZAZIONE $\qquad$ H → SOLO CONDUZIONE

$\vec{E}$ < q LIBERE / q POLARIZZATE

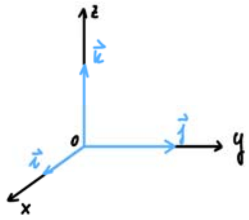
RIASSUNTO VELOCE:

$E_{1t} = E_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$

1. CAMPO CONSERVATIVO E SOLENOIDALE

BREVE RICHIAMO di CALCOLO VETTORIALE:

- UN SDR CARTESIANO È DEFINITO DALLE SEGUENTI BASI ORTONORMALI: $\vec{u}_i$, CON $i = 1,2,3$



NOTAZIONI ALTERNATIVE: $\vec{u}_1 = \vec{u}_x = \vec{i}$

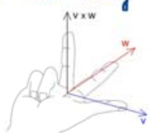
$\vec{u}_2 = \vec{u}_y = \vec{j}$

$\vec{u}_3 = \vec{u}_z = \vec{k}$

DELTA di KRONECHER

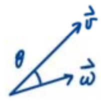
$$\delta_{ij} = u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1 & \text{SE } i = j \\ 0 & \text{SE } i \neq j \end{cases}$$

I 3 ASSI SEGUONO LA REGOLA della MANO DESTRA: x, y, z



PRODOTTO SCALARE:

- PRODOTTO TRA DUE VETTORI CHE RESTITUISCE UNO SCALARE:
  - $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$
  - $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|v\| \|w\| \cos\theta$, DOVE θ È L'ANGOLO COMPRESO TRA $\vec{v}$ E $\vec{w}$



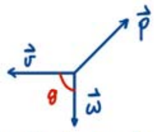
PRODOTTO VETTORIALE:

PRODOTTO TRA DUE VETTORI CHE RESTITUISCE UN VETTORE:

- $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(v_y w_z - v_z w_y) + \vec{j}\,(v_z w_x - v_x w_z) + \vec{k}\,(v_x w_y - v_y w_x)$

  → DETERM. di una MAT. BIDIMENSIONALE

- $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \sin\theta$, DOVE θ È L'ANGOLO TRA $\vec{v}$ E $\vec{w}$ E L'ORIENTAZIONE È DATA DALLA REGOLA della MANO DESTRA

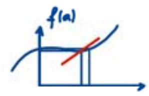


OPERATORI VETTORIALI BASATI SU ∇: → detto "NABLA" o "DEL"

- ∇ È UN VETTORE CON COMPONENTI UGUALI E DERIVATE PARZIALI

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

↳ la derivata dà la pendenza della tangente



$\frac{df}{dx}$

- SI OTTENGONO DIVERSE OPERAZIONI A SECONDA CHE ∇ SIA APPLICATO A SCALARI o VETTORI

- **GRADIENTE** → ∇ APPLICATO A UNA FUNZIONE SCALARE

  $f(x,y,z)$: SPAZIO CARTES. 3D

  - CONSIDERO $\underbrace{f = f(x,y,z)}_{\text{CAMPO SCALARE}}$ FUNZIONE SCALARE DEFINITA nello SPAZIO CARTESIANO da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  - ESEMPIO: TEMPERATURA, PRESSIONE

  $$\nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$ FUNZIONE VETTORIALE

- **DIVERGENZA** → ∇ APPLICATO AD UNA FUNZIONE VETTORIALE (CON PRODOTTO SCALARE)
  - CONSIDERIAMO $\underbrace{\vec{v} = \vec{v}\,(x,y,z)}_{\text{CAMPO VETTORIALE}}$ FUNZIONE VETTORIALE DEFINITA nello SPAZIO CARTESIANO
  - ESEMPIO: VELOCITÀ del VENTO

  $$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$ FUNZIONE SCALARE

  $$\nabla \cdot \vec{v}\,(x,y,z) = \frac{\partial v_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(x,y,z)$$

"curl"

- **ROTORE** → ∇ APPLICATO AD UNA FUNZIONE VETTORIALE (con PRODOTTO VETTORIALE)

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$ FUNZIONE VETTORIALE

- POICHÈ ∇ È COSTITUITO DA DERIVATE PARZIALI, LINEARI, E ANCH'ESSO È LINEARE

$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$ GRADIENTE di una SOMMA di FUNZIONI SCALARI

$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \nabla f$ GRADIENTE di un PRODOTTO di FUNZIONI SCALARI

$\nabla(\vec{v} + \vec{w}) = \nabla \vec{v} + \nabla \vec{w}$ DIVERGENZA di una SOMMA di FUNZIONI VETTORIALI

$\nabla(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \nabla \wedge \vec{v} + \beta \nabla \wedge \vec{w}$ ROTORE di una SOMMA di FUNZIONI VETTORIALI

- **OPERATORE LAPLACIANO** ∇^2

APPLICATO A F SCALARE: $\nabla^2 f\,(x,y,z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ $\quad \nabla^2 F\,(x,y,z)$ FUNZIONE SCALARE (DIVERGENZA di un GRADIENTE)

CAMPO SCALARE

APPLICATO A $\vec{v}$ VETTORIALE: $\nabla^2 \vec{v}\,(x,y,z) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{\text{DIV. VETTORE}}) - \nabla \wedge (\underbrace{\nabla \wedge \vec{v}}_{\text{ROTORE VETTORE}})$ $\quad \nabla^2 \vec{v}\,(x,y,z)$ FUNZIONE VETTORIALE (GRADIENTE di una DIVERGENZA MENO ROTORE di un ROTORE)

CAMPO VETTORIALE

RELAZIONI NOTEVOLI:

ABBIAMO DUE IDENTITÀ

1) $\nabla \wedge (\nabla f) = \vec{0}$ IL ROTORE di un GRADIENTE È ZERO

2) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) = 0$ LA DIVERGENZA di un ROTORE È ZERO

DEFINIZIONI

- UN VETTORE AVENTE $\nabla \wedge \vec{v} = \vec{0}$ OVUNQUE È DETTO IRROTAZIONALE
- UN VETTORE AVENTE $\nabla \cdot \vec{v} = \vec{0}$ OVUNQUE È DETTO SOLENOIDALE

SE CONSERVATIVO
⇓
IRROTAZIONALE

CONSEGUENZE

1) SE UN VETTORE $\vec{v}$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $\vec{v} = \nabla f \implies \nabla \wedge \vec{v} = \nabla \wedge (\nabla f) = 0 \implies \vec{v}$ IRROTAZIONALE → ROTORE NULLO

SE $\vec{v} = \nabla f$, $\vec{v}$ È CONSERVATIVO ⇒ SE UN CAMPO $\vec{v}$ È CONSERVATIVO ALLORA È ANCHE IRROTAZIONALE

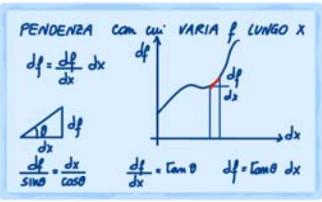
2) SE UN VETTORE $\vec{v}$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\omega} \implies \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{\omega}) = 0 \implies \vec{v}$ SOLENOIDALE → DIV. NULLA

SE UN VETTORE $\vec{v}$ È IRROTAZIONALE (E CONSERVATIVO) ALLORA È ANCHE SOLENOIDALE

$\implies \nabla^2 \vec{v} = \nabla(\cancel{\nabla \cdot \vec{v}}) - \nabla \wedge (\cancel{\nabla \wedge \vec{v}}) = \vec{0} \implies \nabla^2 \vec{v} = 0$ EQ. di LAPLACE (VETTORIALE)

- SE $\vec{v} = \nabla f \implies \nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \nabla \cdot \vec{v} = 0 \implies \nabla^2 f = 0$ EQ. di LAPLACE (SCALARE)

UN CAMPO VETTORIALE IRR. E SOL. È DETTO CAMPO ARMONICO (f, T FREQ. PERIODICITÀ)



CONSIDERAZIONI sul GRADIENTE

$\nabla f\,(x,y,z) = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ quanto veloce varia lungo la direzione dov'è la variaz. max. di pendenza?

- DATO UN CAMPO SCALARE $f(x,y,z)$, UN' ISO SUPERFICIE È IL LUOGO GEOMETRICO DOVE f = COSTANTE
- SU UN' ISOSUPERFICIE, $dF = 0$ LA VARIAZIONE INFINITESIMA È 0

(1) $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$ DIFFERENZIALE COMPLETO

È uno SCALARE

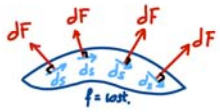
↳ SIMILE AL GRADIENTE $\nabla f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

(2) $d\vec{s} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$ DIFFERENZIALE SPOSTAMENTO

$dF = \nabla f \cdot d\vec{s}$ È un PRODOTTO SCALARE

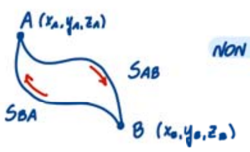
- SE RICONGIUNGIAMO L'ATTENZIONE SU UN' ISO SUPERFICIE $df = 0$, $\nabla f \cdot ds = 0$, $\nabla f \perp ds$ GRADIENTE ORTOGONALE alla SUPERFICIE
- ∇f È ORTOGONALE A OGNI $d\vec{s}$ SE $d\vec{s}$ APPARTIENE ALL' ISO SUPERFICIE

CIRCUITAZIONE



- DATO UN CAMPO VETTORIALE $\vec{v} = \vec{v}\,(x,y,z)$ E UNA CURVA "S" SU UNO SPAZIO CARTESIANO: $I = \int_s \vec{v} \cdot ds$
- SE $\vec{v} = \nabla f$, $\vec{v} \cdot ds = \nabla f \cdot ds = df$ E $I = \int_s \vec{v} \cdot ds = \int_A^B dF = f(B) - f(A)$
- SE $\vec{v} = \nabla f$, $\vec{v}$ È CONSERVATIVO ⇒ LA CIRCUITAZIONE AD UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI di INTEGRAZ.
- SE "S" È UNA LINEA CHIUSA:

$$\underset{\text{chiusa}}{\oint_s} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \underset{\text{andata}}{\int_{AB}} \vec{v} \cdot ds + \underset{\text{ritorno}}{\int_{BA}} \vec{v} \cdot ds = \int_A^B df + \int_B^A df = f(B) - f(A) + f(A) - f(B) = 0$$



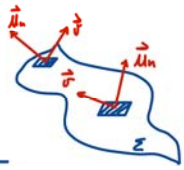
NON DIPENDE DALLA FORMA di S

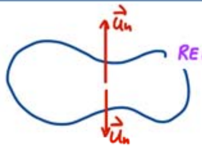
$\oint_s \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ SE $\vec{v}$ È CONSERVATIVO

FLUSSO

DATA UNA SUPERFICIE Σ (APERTA o CHIUSA) DEFINITA SU UNO SPAZIO CARTESIANO E UN CAMPO VETTORIALE $\vec{v}$ IL FLUSSO È:

$\phi(\vec{v}) = \iint_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{u}_n\, d\Sigma$ DOVE U_n È IL VERSORE A Σ, $\|\vec{u}_n\| = 1$





REGOLA MANO DESTRA

SE SUP. CHIUSA ⇒ $\vec{u}_n$ RIVOLTA VERSO L'ESTERNO

SE SUP. APERTA ⇒ VERSO ARBITRARIO (REGOLA MANO DX)

TEOREMA di GAUSS

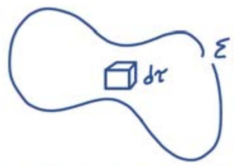
IL FLUSSO di un CAMPO VETTORIALE $\vec{v}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA Σ È:

$$\phi(\vec{v}) = \oint\!\!\oint \vec{v} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \iiint_\tau \nabla \cdot \vec{v} \, d\tau$$

↳ Triplo (di volume)

$d\Sigma \rightarrow$ ELEMENTO di SUPERFICIE INFINITESIMO

$d\tau \rightarrow$ ELEMENTO di VOLUME INFINITESIMO ENTRO Σ



L'INTEGRALE DOPPIO di SUPERFICIE Σ SI TRADUCE IN UN INTEGRALE TRIPLO della DIVERGENZA di $\vec{v}$ SUL VOLUME CONTENUTO IN Σ.

Σ RAPPRESENTA IL CONFINE del VOLUME OLTRE IL QUALE L'INTEGRALE TRIPLO È CALCOLATO.

TEOREMA di STOKES

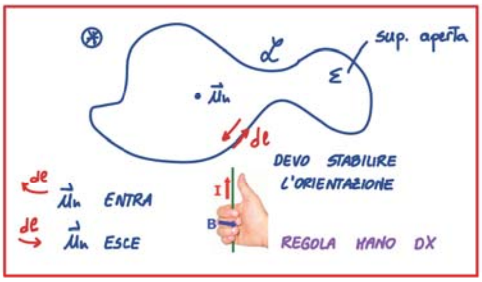
LA CIRCUITAZIONE di un CAMPO VETTORIALE $\vec{v}(x,y,z)$ ATTRAVERSO UNA LINEA CHIUSA $\mathcal{L}$ È:

$$\oint_\mathcal{L} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \vec{v}) \, \vec{u}_n \, d\Sigma$$

$\Sigma \rightarrow$ SUPERFICIE AVENTE $\mathcal{L}$ COME CONTORNO

$d\Sigma \rightarrow$ ELEMENTO di SUPERFICIE INFINITESIMO

$u_n \rightarrow$ NORMALE A Σ



L'INTEGRALE SINGOLO LUNGO $\mathcal{L}$ SI TRADUCE IN UN INTEGRALE DOPPIO (FLUSSO) SULLA SUPERFICIE Σ.

1) Σ È APERTA
2) Σ È ARBITRARIA FINO A QUANDO $\mathcal{L}$ È IL CONTORNO

ALTRE CONSIDERAZIONI

STOKES

CAMPI CONSERVATIVI $\vec{v} = \nabla f$ $\quad \nabla \wedge \vec{v} = 0$ (IRROTAZ.) $\quad \oint_\mathcal{L} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$ PER OGNI LINEA CHIUSA $\mathcal{L}$

CAMPI SOLENOIDALI $\vec{v} = \nabla \wedge \vec{w}$ $\quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$ $\quad \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{v} \, \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$

GAUSS

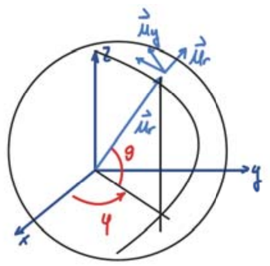
TEOREMA di HELMHOLTZ

CAMPI VETTORIALI CONTINUI POSSONO ESSERE SCOMPOSTI:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = \nabla f + \nabla \wedge \vec{g}$$

$u = \nabla f$ IRROTAZIONALE

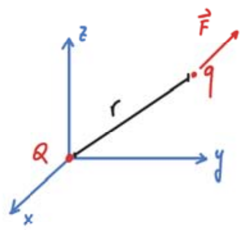
$w = \nabla \wedge g$ SOLENOIDALE



r, θ, φ

2. FORZA ELETTRICA e CAMPO ELETTROSTATICO

FORZA ELETTROSTATICA, CAMPO ELETTROSTATICO e POTENZIALE ELETTROSTATICO

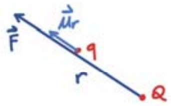


- L'INTERAZIONE ELETTROSTATICA SI MANIFESTA COME UNA FORZA TRA DUE o PIÙ OGGETTI
- LA FORZA ELETTROSTATICA PUÒ ESSERE ATTRATTIVA o REPULSIVA
- LA PROPRIETÀ CHE GLI OGGETTI INTERAGENTI DEVONO AVERE È DETTA CARICA ELETTRICA
- LA GRAVITÀ È BASATA SULLA MASSA; LA FORZA ELETTROSTATICA SULLA CARICA
- LA MASSA È SEMPRE POSITIVA ⟷ LA FORZA GRAVITAZIONALE È SEMPRE ATTRATTIVA
- LA CARICA APPARE POSITIVA (+) o NEGATIVA (−) PERCHÈ PUÒ ESSERE SIA ATTRATTIVA CHE REPULSIVA

FORZA di COULOMB e LEGGE di COULOMB

- DATE DUE CARICHE PUNTIFORMI Q e q, LA FORZA ELETTROSTATICA AGENTE SU q PER LA PRESENZA di Q È:

$$\boxed{\vec{F} = K\frac{qQ}{r^2}\,\vec{u}_r}$$



r: DISTANZA di SEPARAZIONE tra q e Q

$\vec{u}_r$: VERSORE da Q a q $\quad \|\vec{u}_r\| = 1$ (DIREZ. RADIALE)

K: COSTANTE di GRAVITAZIONALITÀ

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qQ}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad \varepsilon_0 = \left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]$$

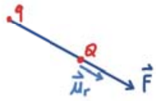
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} > 0 \qquad r^2 > 0$

$$\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

ε_0: PERMETTIVITÀ DIELETTRICA del VUOTO

$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$

- UN ESEMPIO di CARICA PUNTIFORME È $q_e = -1.6\cdot 10^{-19}\,C$
- SE A ESERCITA UNA FORZA SU B, B ESERCITA UNA FORZA SU A UGUALE e OPPOSTA. 3° PRINCIPIO della DINAMICA (AZIONE e REAZIONE)
- NON C'È IL MENO nella FORMULA ⟶ DIPENDE da $\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$ PUNTA SEMPRE VERSO L'ESTERNO)
- $\uparrow r\ \downarrow F$: MAGGIOR DISTANZA ⟹ MINOR FORZA



ANALISI DIMENSIONALE

$[Q] = $ Coulomb $\qquad [\varepsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2}$

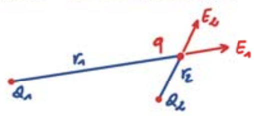
$[F] = N \qquad [r] = m$

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

- COME PER LA GRAVITAZIONE, SI APPLICA IL PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE.
- NEL PUNTO IN CUI LA CARICA:

$E_{TOT} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (SOMMA VETTORIALE)

$E_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\,(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q\cdot E_{TOT}$



CAMPO ELETTROSTATICO ($\vec{E}$) SI MANIFESTA SOTTO FORMA di FORZA SE AGGIUNGO una CARICA

- PER AVERE UNA PROVA SPERIMENTALE DELL'INTERAZIONE ELETTROSTATICA SONO NECESSARIE ALMENO DUE CARICHE
- SE CONSIDERO Q COME SORGENTE e q COME BERSAGLIO, DEFINISCO IL CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA Q IN UN PUNTO A DISTANZA r:

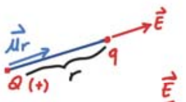
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r}$$

GENERATO DA F SE LA CARICA SONDA q È A DISTANZA r DA Q.

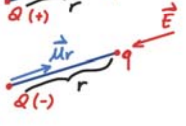
VOLT È L'UNITÀ di MISURA del POTENZIALE ELETTROSTATICO

- È UN CAMPO VETTORIALE $\qquad [E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$ $\qquad$ DIVIDO LA FORZA VETT. per uno SCALARE

ORIENTAZIONE di $\vec{E}$



SE $Q > 0$, $\vec{E}$ È USCENTE
- SE $q > 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ USCENTE, REPULSIVA ($\vec{F} \parallel \vec{E}$)
- SE $q < 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ ENTRANTE, ATTRATTIVA ($\vec{F} \parallel -\vec{E}$)



SE $Q < 0$, $\vec{E}$ È ENTRANTE
- SE $q > 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ ENTRANTE, ATTRATTIVA ($\vec{F} \parallel \vec{E}$)
- SE $q < 0$: $\vec{F} = q\vec{E}$ USCENTE, REPULSIVA ($\vec{F} \parallel -\vec{E}$) antiparallelo

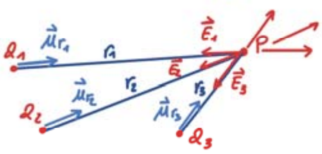
$\vec{F}$ ATTRATTIVA $\propto -\vec{u}_r$

$\vec{F}$ REPULSIVA $\propto \vec{u}_r$

- L'EVIDENZA SPERIMENTALE PER CUI LE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO TENDONO AD ATTRARSI E SI RESPINGONO SE HANNO STESSO SEGNO

DISTRIBUZIONE di CARICHE DISCRETE E CONTINUE

COME APPLICAZIONE del PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE SE CI SONO N SORGENTI DISCRETE PUNTIFORMI q_i, $i = 1, \dots, N$ IL CAMPO TOTALE IN UN PUNTO P È: $\quad E_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \quad$ DOVE $\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\,\vec{u}_{ir}$ $\quad$ CON $\vec{u}_{ir}$ ORIENTATO DALLA SORGENTE A P



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1^2}\,\vec{u}_{r_1} + \frac{Q_2}{r_2^2}\,\vec{u}_{r_2} + \frac{Q_3}{r_3^2}\,\vec{u}_{r_3}\right)$$

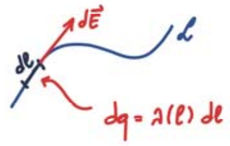
È UNA SOMMA VETTORIALE

IN CASO DI DISTRIBUZIONE CONTINUE DI CARICHE, DISTINGUIAMO DISTRIBUTORI LINEARI, SUPERFICIALI E VOLUMICHE

— Distribuzione di carica lineare

- LA CARICA È DISTRIBUITA LUNGO $\mathcal{L}$ CHE RICHIEDE UNA FUNZIONE

$\boxed{Q = \int_{\mathcal{L}} \lambda \cdot dl}$ λ DENSITÀ LINEARE DI CARICA $\lambda = \frac{Q}{\mathcal{L}}$ $[\lambda = \frac{C}{m}]$



- SE $\lambda(P)$ È COSTANTE, LA CARICA È UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA LUNGO $\mathcal{L}$

SE $\lambda = cost.$ $\Longrightarrow$ $Q = \lambda \int_{\mathcal{L}} dl = \lambda \cdot \mathcal{L}$

- OGNI ELEMENTO DI $\mathcal{L}$ HA ASSOCIATA una $dq = \lambda(P) \cdot dl$
- ESSENDO PUNTIFORME, IL CARICO PRODUCE un CAMPO $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- $\vec{u}_r$ COLLEGA dl CON IL PUNTO IN CUI $\vec{E}$ SI MANIFESTA

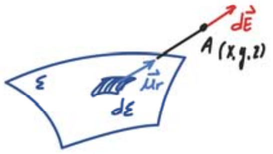
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r \qquad \vec{E}(P) = \int_{\mathcal{L}} \frac{\overbrace{\lambda\, dl}^{dq}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u}_r$ È IL CAMPO TOTALE IN UN PUNTO dello SPAZIO, PRODOTTO dalla DISTRIB. di CARICA LINEARE

N.B.: L'INTEGRALE HA UNA FUNZIONE VETTORIALE. IN FUNZIONE della GEOMETRIA e del S.D.R. USATO, UN MODO PRATICO PER TRATTARE QUESTO INTEGRALE È DIVIDERLO IN 3 INTEGRALI SEPARATI (ES. x, y, z DIREZIONI) QUANDO È POSSIBILE

— Distribuzione superficiale di carica

- LA CARICA È DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE Σ CHE RICHIEDE UNA FUNZIONE DI DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma(P) = \sigma(x', y', z')$ $[\sigma] = \frac{C}{m^2}$
- SE $\sigma(P)$ = COSTANTE, LA CARICA È UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA $Q = \sigma \iint_{\Sigma} d\Sigma = \sigma\Sigma$ $\sigma = \frac{Q}{\Sigma}$
- OGNI ELEMENTO SUPERFICIALE IN $P = (x', y', z')$ HA ASSOCIATA $dq = \sigma(P) \cdot d\Sigma$ E PRODUCE UN CAMPO ELETTROSTATICO $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{\sigma(P)\, d\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$



$$\vec{E}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma\, d\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma} \frac{\sigma\, d\Sigma}{r^2}\vec{u}_r$ È IL CAMPO TOTALE ELETTROSTATICO NEL PUNTO A

— Distribuzione volumica di carica

- LA CARICA È DISTRIBUITA IN UN DATO VOLUME τ, CHE RICHIEDE una FUNZIONE di DENSITÀ VOLUMICA $\rho(P) = \rho(x', y', z')$
- SE $\rho(P)$ = COSTANTE, LA DISTRIBUZIONE È OMOGENEA
- OGNI ELEMENTO di VOLUME $d\tau$ IN $P = (x', y', z')$ NEL VOLUME τ HA ASSOCIATA $dq = \rho(P) \cdot d\tau$ E PRODUCE $dE = \frac{\rho(P) \cdot d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

$\vec{E} = \iiint_{\tau} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x', y', z')}{r^2}\, dx'\, dy'\, dz'$ CON $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

- PER DISTRIBUZIONI OMOGENEE:

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= \int_{\mathcal{L}} \lambda\, dl = \lambda \int_{\mathcal{L}} dl = \lambda \cdot \text{lenght}(\mathcal{L}) \longrightarrow \lambda = \frac{Q}{\text{lenght}(\mathcal{L})} \\ Q &= \iint_{\Sigma} \sigma\, d\Sigma = \sigma \iint_{\Sigma} d\Sigma = \sigma \cdot \text{Area}(\Sigma) \longrightarrow \sigma = \frac{Q}{\text{Area}(\Sigma)} \\ Q &= \iiint_{\tau} \rho\, d\tau = \rho \iiint_{\tau} d\tau = \rho \cdot \text{Volume}(\tau) \longrightarrow \rho = \frac{Q}{\text{Volume}(\tau)} \end{aligned}}$$

Lavoro di una forza elettrostatica

- DATA UNA q (SORGENTE), UN CAMPO $\vec{E}$ È GENERATO DOVE q_0 (SONDA) SI POSIZIONA
- SU q_0 SI PRODUCE $\vec{F} = q_0\vec{E}$, DOVE $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- SE q_0 SI MUOVE da A a B per $\vec{F}$:

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ N.B.: SOLO LA PROIEZIONE di F su $d\vec{s}$ CONTRIBUISCE a dW PERCHÈ $dW = |\vec{F}| \cos\theta\, |d\vec{s}|$

IL LAVORO TOTALE È: $W = \int_{\mathcal{L}} dW = \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

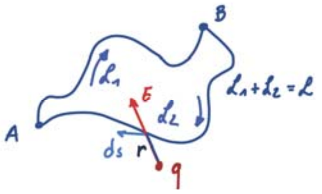
SE $\mathcal{L}$ È UNA LINEA CHIUSA: $W = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \mathcal{E}$ DOVE $\mathcal{E}$: FORZA ELETTROMOTRICE

1) $\mathcal{E}$ NON È UNA "FORZA"
2) $\mathcal{E} = 0$ SE $\vec{E}$ È ELETTROSTATICO

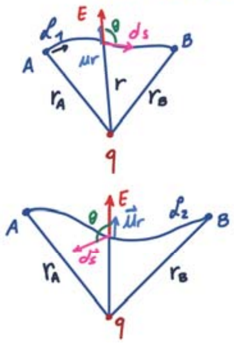
- PER OGNI LINEA CHIUSA $\mathcal{L}$: $\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \longrightarrow \vec{E}$ È CONSERVATIVO

- CONSIDERO $\vec{E}$ GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME q: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- CALCOLO $\oint \vec{E}\,d\vec{s}$ LUNGO UNA LINEA ARBITRARIA $\mathcal{L}$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = \oint_{\mathcal{L}_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{L}_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\, d\vec{s} + \int_{\mathcal{L}_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\, d\vec{s}$$



$\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = ds\cos\theta = dr$



$$\int_{\mathcal{L}_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{L}_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$$\int_{\mathcal{L}_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{L}_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\cdot d\vec{s} = \int_{r_B}^{r_A} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) + \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)\right] = 0$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO

- $\oint_{\mathcal{L}} E\cdot ds = 0$ PER QUALSIASI LINEA CHIUSA $\mathcal{L}$
- $\int_{\mathcal{L}} E\cdot ds$ DIPENDE SOLO dagli ESTREMI DI INTEGRAZIONE SE LA LINEA $\mathcal{L}$ È APERTA
- $\vec{E}$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME GRADIENTE di un CAMPO SCALARE

- IN ASSENZA di FORZE DISSIPATIVE, IL LAVORO di una FORZA EGUAGLIA L'OPPOSTO della VARIAZIONE di ENERGIA POTENZIALE: $W = -\Delta U$

NEL NOSTRO CASO, IL LAVORO CALCOLATO LUNGO LA LINEA $\mathcal{L}$ (APERTA):

$$W = q_0 \int_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

$[W] = [U] = [J]$ È ESPRESSA IN JOULE

QUINDI: $\Delta U = -\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = -\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = U_B - U_A$ E $U_A = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$; $U_B = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

- ELIMINANDO q_0: $\frac{U_A}{q_0} = V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$ $\quad \frac{U_B}{q_0} = V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$ $\quad V_A$ e V_B SONO I POTENZIALI ELETTROSTATICI di E in A e B

RELAZIONE TRA E e V

- SE $\vec{E}$ È CONSERVATIVO, $\int_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$ HA $\vec{E} = \nabla f$ PERCHÈ È CONSERVATIVO
- QUINDI $\vec{E}\cdot d\vec{s} = \nabla f\cdot d\vec{s} = df \Rightarrow \int_{\mathcal{L}} E\cdot ds = \int_A^B df = f(B) - f(A)$

HA ANCHE: $\int_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{W}{q_0} = -\frac{1}{q_0}(U_B - U_A) = V_A - V_B \Longrightarrow V_A - V_B = f(B) - f(A)$

- DATO CHE ASSUMIAMO $\vec{E} = \nabla f$ ALLORA SEGUE CHE: $\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$. IL CAMPO ELETTROSTATICO È IL GRADIENTE di $-V$ (POTENZIALE).
- VERIFICO LA RELAZIONE CON IL CAMPO COULOMBIANO di una CARICA SORGENTE PUNTIFORME $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- IN COORDINATE POLARI, CILINDRICHE E SFERICHE, LA COMPONENTE RADIALE di ∇ È $\frac{\partial}{\partial r}$
- $\vec{E}$ È RADIALE E DIPENDE SOLO DA r. $\longrightarrow$ NON CI SONO ALTRE DIPENDENZE
- QUINDI $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}$ $\quad \vec{E} = -\nabla V$ $\quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$ $\quad dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \rightarrow$ INTEGRALE INDEF. $\quad V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

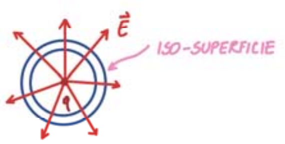
COST. di INTEGR.

NOTA: PER AVERE IL POTENZIALE ELETTROSTATICO ASSOLUTO IN UN DATO PUNTO SONO NECESSARIE ALCUNE INFORMAZIONI ADDIZIONALI $\longrightarrow$ CONDIZIONI AL CONTORNO

PER ESEMPIO $V(\infty) = 0$ IMPLICA $\boxed{C = 0}$ PER IL POTENZIALE di UN PUNTO - COME UNA SORGENTE.

- $[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{J}{C} = V$ (Volt) $\Rightarrow [E] = \frac{V}{m}$ PERCHÈ, PER ESEMPIO $E = -\frac{dV}{dr}$

$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ SOLO PER UNA CARICA PUNTIFORME $\quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$



- LE LINEE del CAMPO ELETTROSTATICO SONO PERPENDICOLARI AL POTENZIALE ISO-SUPERFICIE

UN PUNTO COME LA SORGENTE HA UN' ISO-SUPERFICIE SFERICA, INFATTI, V DIPENDE SOLAMENTE da r.

- POICHÈ "V" DIMINUISCE QUANDO LA DISTANZA "r" AUMENTA, POSSIAMO SCRIVERE CHE IL POTENZIALE IN UN DATO PUNTO A UNA GENERICA DISTANZA r È: $\quad V \propto \frac{1}{r}$

$$\int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = V(r) - V(\cancel{\infty}) = V(r) \quad , \quad \text{CON } C=0 \Rightarrow V(\infty)=0$$

($\vec{E} = -\nabla V$, $V(\infty) = 0$)

$$\int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^{\infty} -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = \int_r^{\infty} dV = \int_{\infty}^{r} dV = V(r) - V(\infty)$$

IL LAVORO È: $\underbrace{q_0 \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{\text{LAVORO}} = \underbrace{(V(r) - V(\infty))\, q_0}_{\text{ENERGIA}}$

QUINDI $q_0 V(r)$ È L'ENERGIA RICHIESTA PER PORTARE UNA CARICA q_0 DA ∞ A r.

- QUESTA ENERGIA È SPESA CONTRO IL CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA q.
- GRAZIE ALLA LINEARITÀ DELLE OPERAZIONI DERIVATA E AL POTENZIALE V SI PUÒ APPLICARE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
- IN GENERALE, SIA $V(x,y,z)$ CHE $U = q_0 V(x,y,z)$ SONO FUNZIONI SCALARI DEFINITE IN UNO SPAZIO 3D.
- IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PUÒ ESSERE APPLICATO SIA A DISTRIBUZIONI DI CARICHE DISCRETE E CONTINUE.
  - PER DISTRIBUZIONI DI CARICHE DISCRETE: $V_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$
  - PER DISTRIBUZIONI DI CARICHE CONTINUE, INTEGRIAMO IL POTENZIALE INFINITESIMO dV ASSOCIATO AD UNA CARICA ELEMENTARE dq.

$\vec{E} = \int_L \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ $\quad$ LINEARE: $\quad dq = \lambda\, dl \quad dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad V = \int_L \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\vec{E} = \iint_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ $\quad$ SUPERFICIALE: $\quad dq = \sigma\, d\Sigma \quad dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma d\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad V = \iint_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\vec{E} = \iiint_{Vol} \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ $\quad$ VOLUMICA: $\quad dq = \rho\, d\tau \quad dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad V = \iiint_\tau \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

- DATA UNA CARICA q_0 CHE SI MUOVE DA A A B TALE CHE $|\vec{v}_A| \neq |\vec{v}_B|$, UNA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA PUÒ ESSERE SCRITTA:

$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$ $\quad$ SE LA VELOCITÀ CAMBIA NEL TEMPO IN CUI q_0 SI MUOVE DA A A B, QUESTO SIGNIFICA CHE C'È UN ACCEL. E CHE QUINDI UNA FORZA AGISCE SU q_0.

$\Delta E_k = W$, DOVE W È IL LAVORO SPESO DALLA FORZA, CORRISPONDE ALLA VARIAZIONE ΔE_k DELL'ENERGIA CINETICA

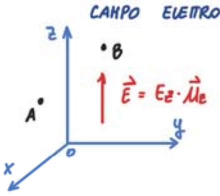
$W = -\Delta U_e$ $\quad$ NEL CASO DI UNA FORZA CONSERVATIVA

ΔU_e È LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE, $\quad \Delta U_e = U_e(B) - U_e(A)$

- QUINDI $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = U_e(A) - U_e(B) \Longrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + U_e(B) = \frac{1}{2} m v_A^2 + U_e(A)$ $\quad$ CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA DA A A B

- PIÙ NEL DETTAGLIO: $\frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V(B) = \frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V(A)$ $\quad$ DOVE $V(A)$ E $V(B)$ SONO I POTENZIALI ELETTROSTATICI IN A E IN B
- NEL CASO SIANO PRESENTI DELLE FORZE, IL CORRISPETTIVO LAVORO VA INCLUSO.

ESEMPIO: SE $q_0 > 0$ E $V(A) > V(B)$, $E_k(B) > E_k(A)$ E LA CARICA q_0 È ACCELERATA. QUESTO PUÒ ESSERE RAGGIUNTO, PER ESEMPIO, IN UN CAMPO ELETTROSTATICO UNIFORME COME $\vec{E} = E_z \cdot \vec{u}_z$, CON E_z = COSTANTE



PRESI DUE PUNTI A E B IN POSIZIONI DIVERSE, ABBIAMO:

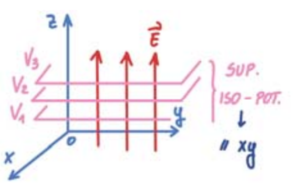
$dV = -E_z\, dz \Longrightarrow V_B - V_A = -\int_A^B E_z\, dz = E_z (z_A - z_B)$

$E_k(B) - E_k(A) = -q_0 (V_B - V_A) = q_0 E_z (z_B - z_A) < 0$

SE $z_B > z_A$ (COME IN QUESTO CASO) $\Rightarrow \Delta E_k > 0$, q_0 ACCELERA

IN UN CASO PIÙ GENERICO DOVE $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z) \cdot \vec{u}_x + E_y(x,y,z) \cdot \vec{u}_z + E_z(x,y,z) \cdot \vec{u}_z$

$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z\right)$ E $V = V(x,y,z)$ DIPENDE DALLE TRE COORDINATE CARTESIANE



SE A E B SONO DUE PUNTI ARBITRARI: $\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_0}$

IL LUOGO GEOMETRICO DOVE V = COST. È UNA SUPERFICIE ISO-POTENZIALE

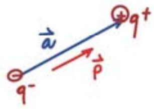
LE LINEE DEL CAMPO ELETTROSTATICO SONO PERPENDICOLARI ALLA SUP. ISO-POTENZIALE IN OGNI PUNTO.

PER UN CAMPO UNIFORME $\vec{E} = E_z \cdot \vec{u}_z$

DIPOLO ELETTRICO

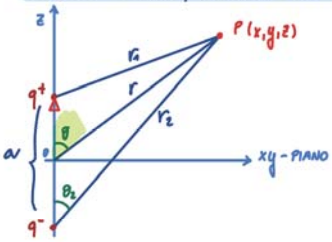
- UN DIPOLO ELETTRICO È UN OGGETTO ELETTRICAMENTE NEUTRO COSTITUITO DA DUE CARICHE PUNTIFORMI CON IDENTICO VALORE ASSOLUTO MA SEGNO OPPOSTO, SEPARATE DA UNA DISTANZA FISICA "a". LA DISTANZA DI SEPARAZIONE È UN VETTORE, LA CUI ORIENTAZIONE È CONVENZIONALMENTE PRESA DALLA CARICA NEGATIVA A QUELLA POSITIVA $(q^- \rightarrow q^+)$ P È ANTI PARALLELO

IL MOMENTO di DIPOLO ELETTRICO È DEFINITO COME: $\boxed{\vec{P} = q \cdot \vec{a}}$



DIPOLO COME SORGENTE DI UN CAMPO ELETTROSTATICO

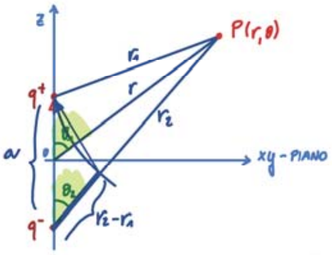
- SEBBENE NEUTRO, IL DIPOLO PUÒ PRODURRE UN CAMPO ELETTROSTATICO NELLO SPAZIO CIRCOSTANTE.



- POTENZIALE IN UN PUNTO P ARBITRARIO, A UNA DISTANZA "r" DALL'ORIGINE (CENTRO del DIPOLO) E A UNA DISTANZA r_1 e r_2 DA q^+ E q^- RISPETTIVAMENTE. $V(P) = V_+(P) + V_-(P)$

$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

- SUL PIANO X-Y $r_1 = r_2 \Rightarrow V(P) = 0$



- SE $r \gg a$ (IL PUNTO P È AD UNA DISTANZA MOLTO MAGGIORE DELLA GRANDEZZA FISICA del DIPOLO):

$$\begin{cases} r_2 - r_1 \simeq a\cos\theta \\ r_2 \cdot r_1 \simeq r^2 \end{cases}$$

TEOREMA dei SENI

PERCHÉ $\theta_1 \simeq \theta_2 \simeq \theta$ E $r_2 \simeq r_1 \simeq r$

QUINDI: $V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a \cdot \cos\theta}{r^2}$ DOVE θ È L'ANGOLO di P RISPETTO ALL'ASSE z.

ALTERNATIVAMENTE: $V(P) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ DOVE $\vec{u}_r$ È IL VETTORE UNITARIO PUNTATO VERSO LA POSIZIONE di P.

$V(P) = \frac{|\vec{P}|\, z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ DOVE z È LA COORDINATA z di P E $\cos\theta = \frac{z}{r}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

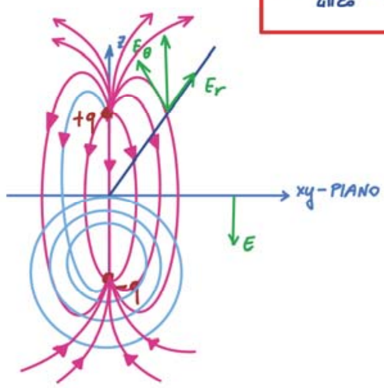
NOTARE CHE $V(P)$ È UNA FUNZIONE SCALARE. ANCHE SE IL MOMENTO di DIPOLO "$\vec{P}$" ENTRA IN GIOCO, È (SCALARE) MOLTIPLICATO PER $\vec{u}_r$, RISULTA UNO SCALARE. (la carica puntiforme è uno scalare)

IL POTENZIALE di un DIPOLO DIPENDE DA r^2: $P \propto \frac{1}{r^2}$

↳ CONTA MOLTO LA PROIEZIONE di P su "r"

CAMPO ELETTROSTATICO. IN COORDINATE CARTESIANE: $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_z$

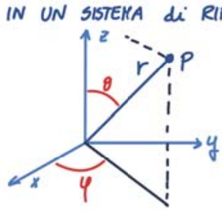
$$\boxed{E_x = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5} \qquad E_y = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5} \qquad E_z = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{3}}$$



LE LINEE del CAMPO ELETTROSTATICO ESCONO DALLA CARICA POSITIVA (q^+) ED ENTRANO DALLA CARICA NEGATIVA (q^-)

LE SUPERFICI ISO-POTENZIALI SONO $\perp$ ALLE LINEE di CAMPO

DATA LA SIMMETRIA ASSIALE del CAMPO, È CONVENIENTE USARE LE COORDINATE POLARI IN UN SISTEMA di RIFERIMENTO SFERICO



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

- IL POTENZIALE $V(P)$ E IL CAMPO $\vec{E}(P)$ SONO CHIARAMENTE INDIPENDENTI DA φ (MOMENTO di DIPOLO).
- LE VARIABILI RILEVANTI SONO "r" (DISTANZA del CENTRO del DIPOLO) E L'ANGOLO θ RISPETTO ALL'ASSE z.
- SE ESPRESSE IN COORDINATE SFERICHE, IL CAMPO ELETTROSTATICO HA SOLO E_r e E_θ COME COMPONENTI.

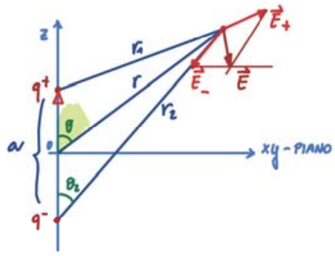
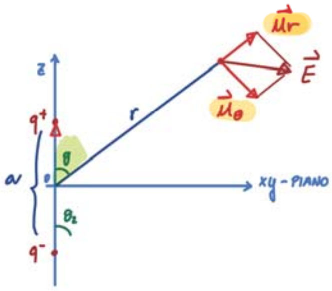


ILLUSTRAZIONE del PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE



IN OGNI PUNTO $P(x,y,z)$, IL RISULTATO È $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$
PUÒ ESSERE SCOMPOSTO in una $\vec{E}_R$ (RADIALE) e $\vec{E}_\theta$ (POLARE)

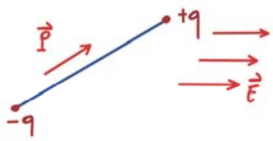
IN CONCLUSIONE: $\begin{cases} \vec{E}_r = E_r \cdot \vec{u}_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \vec{u}_r \\ \vec{E}_\theta = E_\theta \cdot \vec{u}_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$

NOTA: PER CAPIRE CHE $\vec{E}$ NON DIPENDE DA φ, IMMAGINIAMO di REPLICARE IL DISEGNO SOPRA SU OGNI SEZ. VERTICALE AD un VALORE ARBITRARIO φ RISPETTO ALL'ASSE x. IL RISULTATO NON CAMBIA.

DIPOLO IMMERSO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

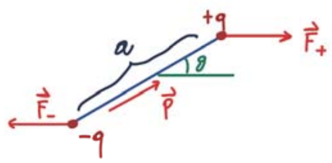
- CASO di CAMPO UNIFORME: IL MODULO, DIREZIONE e VERSO di $\vec{E}$ SONO COSTANTI

COSA SUCCEDE AL DIPOLO? UN DIPOLO $\vec{p}$ CON ORIENTAZIONE ARBITRARIA θ RISPETTO ALLA DIREZIONE DEL CAMPO UNIFORME ($|\vec{E}| = \text{cost.}$)



HO DELLE FORZE di COULOMB CHE AGISCONO SU ENTRAMBE LE CARICHE $\vec{F} = q\vec{E}$
LA FORZA SULLA CARICA POSITIVA SARÀ CONCORDE A $\vec{E}$, AL CONTRARIO SU $-q$ SARÀ DISCORDE

- GUARDANDO AD OGNI CARICA:



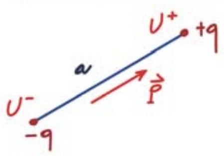
- POICHÈ LA POSIZIONE del CAMPO $\vec{E}$ IN q^+ e q^- È IDENTICA:
$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-|$ E $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$ $\Rightarrow$ LA FORZA RISULTANTE È ZERO
- QUINDI, F+ e F- CREANO UNA COPPIA MECCANICA, CHIAMATA MOMENTO MECCANICO:
  - RISPETTO A q^+:
  $|\vec{M}| = |r \wedge \vec{F}| = r \cdot F_+ \cdot \sin\theta = \frac{a}{2}(+q)|\vec{E}|\sin\theta$ ENTRANTE (REGOLA MANO dx)
  - RISPETTO a q^-: SEMPRE ENTRANTE

- QUINDI, UN DIPOLO ELETTRICO IMMERSO IN $\vec{E}$ UNIFORME È SOGGETTO AD UNA FORZA RISULTANTE ZERO e ad un MOMENTO MECCANICO CHE DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE θ
- LA COPPIA È TALE CHE IL DIPOLO TENDE AD ALLINEARSI A $\vec{E} \rightarrow \vec{p} \parallel \vec{E}$
  ↳ NEL NOSTRO CASO RUOTA IN SENSO ORARIO e ATTORNO AL SUO BARICENTRO CHE SARÀ IL PUNTO MEDIANO del SEGMENTO CHE CONGIUNGE LE CARICHE

- IL MOMENTO COMPLESSIVO SARÀ: $|\vec{M}_{TOT}| = 2\vec{M} = 2 \cdot \frac{a}{2} q|E|\sin\theta = \underbrace{a \cdot q}_{\vec{p} = \vec{q} \cdot a} E\sin\theta = |\vec{p}|\,|\vec{E}|\sin\theta \Rightarrow \boxed{\vec{M}_{TOT} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$
  - SE $\vec{p} \parallel \vec{E}$ (o ANTIPARALLELO) $\Rightarrow \vec{M} = 0$

- DATO CHE $\vec{E}$ È CONSERVATIVO E QUINDI, LA FORZA di COULOMB $\vec{F} = q\vec{E}$ È CONSERVATIVA,
ALLORA POSSIAMO SCRIVERE: $\boxed{\vec{F} = -\nabla U_e}$ DOVE U_e È L'ENERGIA POTENZIALE di un DIPOLO NEL CAMPO ELETTROSTATICO
↳ da $\vec{E} = -\nabla V$

- CASO di CAMPO NON-UNIFORME: SE IL CAMPO NON È UNIFORME IL DIPOLO SUBISCE UN MOTO ROTOTRASLAZIONALE



IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ HA UNA DISTRIBUZIONE ARBITRARIA $\vec{E}(x,y,z)$.
LE DUE CARICHE $q, -q$ AVRANNO RISPETTIVAMENTE ENERGIE POTENZIALI U^+ e U^-.
U^+ E U^- SONO DATE DA: $\begin{cases} U^+ = q \cdot V^+ \\ U^- = q \cdot V^- \end{cases}$?! DOVE V^+ E V^- SONO POTENZIALI ELETTROSTATICI DOVE RISPETTIVAMENTE q E q^- SONO SITUATI
$U_{TOT} = qV^+ - qV^-$

SE $\vec{E}(x,y,z)$ HA UNA DISTRIBUZIONE ARBITRARIA, ALLORA ANCHE $V = V(x,y,z)$ È ARBITRARIA.
SCRIVENDO $V^- = V$, NOI POSSIAMO ESPRIMERE V^+ COME UNA PERTURBAZIONE di V^- IN QUESTO MODO:
$V^+ = V^- + \Delta V = V^- + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z$ ASSUMO QUINDI CHE A PICCOLE DISTANZE $(\delta x, \delta y, \delta z)$ V VARIERÀ LINEARMENTE da V^-

QUINDI L'ENERGIA POTENZIALE: $U_e = qV^+ - qV^- = \cancel{qV} + q\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) - \cancel{qV} = q\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + q\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + q\frac{\partial V}{\partial z}\delta z$
HO SOSTITUITO $V^- = V$

LA DISTANZA VETTORIALE $(\delta x, \delta y, \delta z)$ È $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, SOSTITUISCO:

$$U_e = qV^+ - qV^- = \cancel{qV} + q\left(\frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z\right) - \cancel{qV} = \frac{\partial V}{\partial x}\underbrace{q \cdot a_x}_{=p_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\underbrace{q \cdot a_y}_{=p_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\underbrace{q \cdot a_z}_{=p_z}$$

IN CONCLUSIONE: $\boxed{U_e = \nabla V \cdot \vec{p} = -\vec{E} \cdot \vec{p}}$ ENERGIA POTENZIALE TOTALE del DIPOLO

L'ENERGIA POTENZIALE di un DIPOLO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO ARBITRARIO È DATA DAL PRODOTTO SCALARE TRA IL MOMENTO DIPOLO e $\vec{E}$ CONSIDERATO nella POSIZIONE del DIPOLO.

LA FORZA RISULTANTE È: $\vec{F} = -\nabla U_e = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$ (gradiente di $\vec{p} \cdot \vec{E}$)

SAPENDO CHE: UN DIPOLO IMMERSO IN UN CAMPO UNIFORME HA 2 POSIZIONI di EQUILIBRIO:

- STABILE $\longrightarrow$ $\vec{p} \parallel \vec{E}$ $\longrightarrow$ $U_e < 0$ (ENERGIA MINIMA) $\longrightarrow$ $\vec{F} = 0$ (PERTURBAZIONE $\rightarrow$ BUSSOLA)
  - ↳ il dipolo non può fare niente → situazione di equilibrio
- INSTABILE $\longrightarrow$ $\vec{p} \parallel -\vec{E}$ $\longrightarrow$ $U_e > 0$ (ENERGIA MASSIMA) $\longrightarrow$ $\vec{F} = 0$
  - ↳ una qualunque minima perturbazione perturberà la situazione

PER CALCOLARE L'ENERGIA SPESA DA un MOMENTO MECCANICO PER FAR RUOTARE UN CORPO: MOMENTO · ANGOLO