Centro Stampa

N° 4434

PROGETTAZIONE DI PROTESI E ORGANI ARTIFICIALI TEORIA 2020-21

DI RAFFA MELISSA

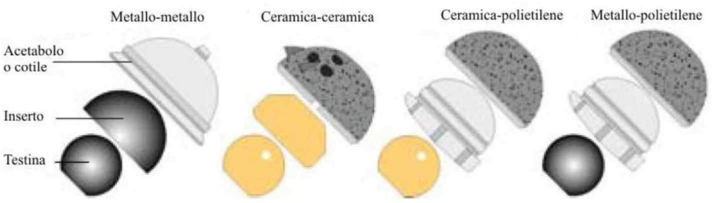
Lezione 1

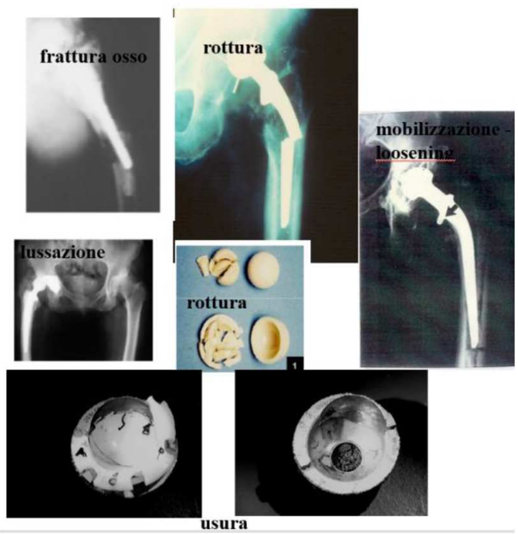
Progettazione biomeccanica di un sistema protesi-osso

Nell'evoluzione della progettazione degli impianti che si interfacciano con l'osso (ortopedici e dentali), dando per scontato che i materiali di cui sono costituiti siano biocompatibili, si sono succeduti e in qualche parte coesistono approcci diversi.
Nella maggior parte dei casi, specie nel passato, l'idea di un nuovo disegno di protesi o di elemento di sintesi deriva dalla creatività del chirurgo, che in generale viene stimolata dall'esperienza acquisita nella pratica clinica.
Sempre più spesso le proposte di nuovi impianti arrivano dalle aziende che coinvolgono uno o più chirurghi nei loro progetti.
Storicamente il primo passo è stato quello di progettare gli impianti in modo puramente meccanico.
Nel caso di un'artroprotesi la progettazione puramente meccanica riguarda il disegno di una struttura che:

- ristabilisca la funzione dell'articolazione naturale, cercando di avvicinarsi il più possibile alla cinematica dell'articolazione, ossia che restituisca gli stessi movimenti, che non vengono imposti dei vincoli.
- inoltre, l'artroprotesi deve resistere ai carichi a cui sarà soggetta,
- in corrispondenza dell'articolazione risulta utile la capacità di ammortizzare gli effetti dinamici dovuti agli urti.

La progettazione ha in particolare come obiettivo la realizzazione di una interfaccia articolare in cui attrito ed usura risultino minimi, sia per ridurre le tensioni e deformazioni dovute all'attrito sia perché la mobilizzazione dell'impianto (scollamento asettico) è anche determinata da una reazione tissutale ai prodotti di usura.



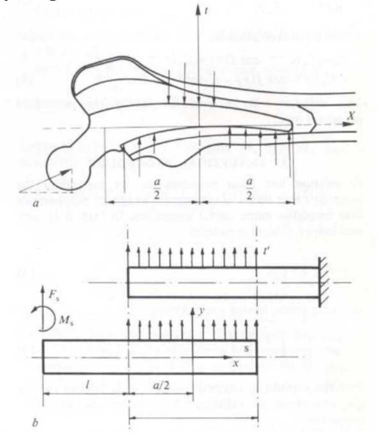


Purtroppo, in particolare le protesi falliscono e le cause di fallimento sono:

- **lussazione**: uno dei componenti protesici fuoriesce dall'altro componente protesico e questo può essere determinato da un disegno sbagliato, da un mal posizionamento dei componenti protesici (errore chirurgico), da una ricostruzione sbagliata della tensione legamentosa (errore chirurgico);
- **rottura dei componenti protesici**: i componenti protesici sono stati sottodimensionati oppure si creano delle situazioni di vincolo una volta che l'impianto è inserito nell'osso che portano a superare i limiti di rottura e superare dei carichi non previsti in laboratorio;
- **usura dei componenti protesici**
- **frattura dell'osso**: l'osso si rompe perché è debole o perché l'impianto è troppo rigido;
- **mobilizzazione → scollamento settico**: quando si scolla e c'è infezione;
  scollamento asettico: la progettazione interviene pesantemente.

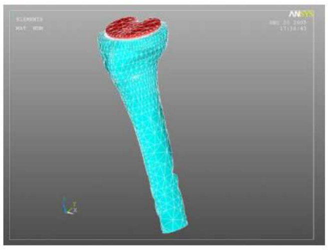
Ogni tipo di impianto, con l'osso che lo riceve, vengono a formare un sistema altamente complesso i cui componenti non possono essere considerati separatamente.
Nel progettare un impianto ed in particolare un'artroprotesi bisogna tenere conto del ruolo

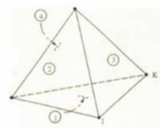
biostrutturale del rimodellamento osseo, che è ciò che distingue la progettazione biomeccanica dalla progettazione meccanica tradizionale.
Questo approccio ha rivoluzionato negli anni ‘90 il classico approccio degli ortopedici e degli odontoiatri, che si concentravano semplicemente sui requisiti funzionali, ma ha rivoluzionato anche l’approccio del classico ingegnere, non bioingegnere, che si focalizzava su regole puramente strutturali.
Nel tempo si è acquisita consapevolezza dell’enorme influenza che gli stati di deformazione e di tensione hanno sulla durata dell’impianto: infatti il sistema osso-impianto è sottoposto a sollecitazioni variabili nel tempo e si ritiene che lo scollamento asettico, che è la causa principale del fallimento delle artroplastiche, sia causato da un meccanismo di rottura a fatica infatti è progressivo ed avviene in tempi più brevi quando si raggiungono ripetutamente valori elevati di tensione-deformazione.
Proprio per studiare e approcciare in questo nuovo modo il sistema biomeccanico che si viene a creare tra protesi e osso, gli approcci sono stati differenti. All’inizio si sono fatti dei modelli matematici elementari per valutare l’entità delle forze scambiate tra osso e impianto; quindi dei disegni bidimensionali dove si pensava non fosse importante tutto il trasferimento dei carichi, ma si andavano a concentrare i carichi sulla punta e in corrispondenza dell’inserimento dell’impianto nell’osso.
Poi si è capito che era molto importante tener conto e ricercare dal punto di vista chirurgico e di progettazione un contatto continuo della protesi rispetto all’osso.

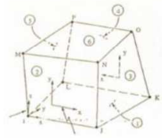


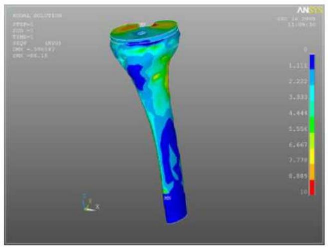
I primi metodi che vennero utilizzati per fare questi modelli furono dei metodi analitici, quindi si associò il comportamento di uno stelo all’interno dell’osso come una trave che appoggia su una fondazione elastica, assumendo delle sezioni trasversali e rigidezza della fondazione costanti.
Una ulteriore evoluzione fu quella di considerare variabili longitudinalmente i materiali e le caratteristiche geometriche delle sezioni trasversali, ed in questi casi le soluzioni divennero più complesse.
Il limite di questi metodi analitici era ad esempio il non poter considerare la curvatura degli steli, il non poter considerare i carichi di torsione e quindi di non poter simulare il comportamento degli steli anatomici.
A dare una risposta a queste esigenze è stata l’introduzione dell’uso di metodi numerici (primi anni ‘70), in particolare del metodo degli elementi finiti.
Il metodo degli elementi finiti, conosciuto come Finite Element Method e con gli acronimi FEM o FEA (Finite Element Analysis), attualmente è lo strumento più valido per condurre analisi strutturali in ambito biomeccanico ed in particolare con applicazioni nel campo odontostomatologico ed ortopedico, ossia quando la struttura biologica coinvolta è costituita dal tessuto osseo, in quanto, unitamente ad una rappresentazione della geometria degli elementi ossei che può essere molto soddisfacente, permette di approssimare la variazione continua delle caratteristiche meccaniche dell'osso tenendo quindi conto della sua disomogeneità ed anisotropia.
Il termine "elementi finiti" fa la sua prima comparsa nella letteratura tecnica nel 1960. Questo metodo originariamente introdotto come procedimento di soluzione di problemi di meccanica strutturale venne presto riconosciuto come una procedura generale di approssimazione numerica applicabile a tutti quei problemi fisici che possono essere descritti da un sistema di equazioni.
Un modello agli elementi finiti descrive i quattro aspetti fondamentali di una struttura (geometria, proprietà dei materiali costituenti, condizioni di carico, condizioni al contorno e di interfaccia).
Il procedimento consiste nel suddividere una struttura complessa in un insieme di elementi semplici di forma geometrica e caratteristiche ben definite, connessi fra loro. La schematizzazione così ottenuta simula la struttura reale e permette di affrontare la risoluzione per via numerica del problema in esame, una volta definite le condizioni di vincolo e di carico. Il risultato di questa procedura iniziale, chiamata discretizzazione, è definito mesh.
Con il metodo degli elementi finiti quindi si simula il comportamento strutturale di un sistema continuo (corpo unico) sostituendolo con un sistema discreto (corpo suddiviso in più parti), costituito da un certo numero di elementi, dei quali si devono poi definire le proprietà meccaniche.

Grazie a questa metodologia è possibile valutare il comportamento fisico di singole strutture o di strutture complesse formate da più componenti che interagiscono fra loro e quindi studiare distribuzioni di tensione o di temperatura o di qualsiasi altra grandezza fisica in corpi di forma semplice o complessa, omogenei o eterogenei, isotropi o anisotropi.
La vera abilità dell'analista sta nel costruire un modello che simuli bene la realtà senza eccedere in finezza di discretizzazione nei punti di scarso interesse strutturale e nell'individuare i vincoli e i carichi che rispecchino la fisica del problema. L'applicazione di questo metodo richiede quindi una buona conoscenza teorica di base che permetta una scelta mirata degli elementi da utilizzare, in relazione all'analisi che si vuol condurre, e una interpretazione critica dei risultati ottenuti alla luce delle limitazioni e delle approssimazioni del metodo. È inoltre necessaria una costante attenzione alle analisi sperimentali che permettono di validare le approssimazioni ipotizzate.





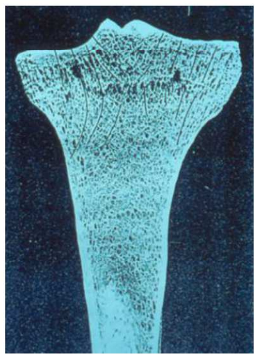




La realizzazione di un modello e l'analisi strutturale agli elementi finiti si sviluppa nelle seguenti fasi:
- Preparazione del modello geometrico
- Discretizzazione dell'intero volume in elementi finiti (tetraedri o parallelepipedi)
- Assegnazione delle proprietà meccaniche dei materiali
- Identificazione dei carichi e dei vincoli
- Scelta del tipo di soluzione (analisi statica o dinamica, lineare o non lineare, ecc.)
- Analisi dei risultati

Pur con le approssimazioni introdotte nella maggioranza dei modelli per quanto riguarda le proprietà meccaniche dell'osso (isotropia, omogeneità, comportamento lineare), per quanto riguarda le condizioni di interfaccia osso-protesi e per quanto riguarda le condizioni di carico e di vincolo, l'uso di questi modelli ha permesso di raggiungere una comprensione di massima del meccanismo osso-impianto.
Per gli impianti ortopedici in particolare, l'analisi strutturale ha consentito, dal 1970 ad oggi, di stabilire regole di carattere generale che permettono oggi di capire quali soluzioni dovrebbero essere escluse prima di procedere alla fase esecutiva del progetto.

A survey of finite element analysis in orthopedic biomechanics: the first decade. Huiskes R, Chao EY. J Biomech. 1983;16(6):385-409.



Tra esse si citano:
- per l'artroplastica di ginocchio la cosiddetta copertura (ossia il fatto che il componente tibiale deve appoggiare sull'osso corticale, al limite debordare un po', ma mai essere più piccolo perché altrimenti affonda), la necessità, prima di inserire la protesi, di allineare i carichi (asse meccanico dell'arto inferiore), la correzione varo-valgo, le conseguenze relative all'adozione rispettivamente di protesi a cerniera o protesi a scivolamento e più in generale il numero dei gradi di libertà da ripristinare.
- Per quanto riguarda l'artroplastica di caviglia, la resezione dell'astragalo.
- Per quanto riguarda l'artroplastica dell'anca: funzione irrigidente della struttura a guscio dell'osso corticale e della struttura del collo femorale, incremento delle sollecitazioni di flessione in presenza di resezioni basse rispetto al caso di resezioni alte dovuto all'aumentare della lunghezza dei bracci di leva dei carichi, la lunghezza dello stelo, press-fit o steli a supporto adattabile (compliant support stems), la funzione del colletto, aree di

ancoraggio, forma delle coppe, tipi di collegamento con l’osso, dimensioni dei componenti protesici, by-pass dei carichi.

Prima dell’utilizzo degli elementi finiti nelle aziende che progettano elementi protesici o elementi di sintesi in ambito ortopedico, la pratica consisteva sostanzialmente nel classico ‘trial and error’ che consiste nel fare un disegno, sperimentarlo e modificarlo tante volte fino a che la clinica dice che va bene.
Combinando ingegneria ed esperienza clinica, è stato ultimamente possibile evitare errori biomeccanici grossolani e ciò ha ridotto di molto i fallimenti almeno a breve termine. In ambito odontoiatrico questa sinergia non si è ancora verificata. C’è ancora spazio per migliorare, sfruttando gli strumenti che si rendono man mano disponibili, anche in altri settori dell’ingegneria, si è in grado di sostituire il tradizionale piano pre-operatorio qualitativo con una vera e propria progettazione biomeccanica della singola artroplastica.

Lezione 2.1

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

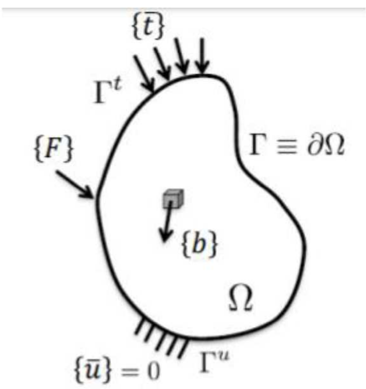
I materiali metallici hanno un comportamento lineare elastico. Considerando una prova di trazione, il materiale avrà una prima parte della curva in cui il materiale ha un comportamento elastico e una seconda parte in cui ha un comportamento non lineare.
Noi lavoreremo nella prima parte in cui il materiale ha un comportamento lineare (prima di Y).
In genere tutti i materiali hanno una zona di linearità che però è una zona di linearità per piccole deformazioni. Quando si parla di piccole deformazioni possiamo approssimare un comportamento lineare.
In biomeccanica la maggior parte dei materiali disponibili hanno comportamenti non lineari, ma noi considereremo piccole deformazioni e quindi linearità.
Il metodo FEM (degli elementi finiti) è un metodo numerico di risoluzione del problema della meccanica strutturale.
Quando si parlerà di deformazioni (o strain) si parlerà anche di tensioni (o stress) e possiamo rappresentare i relativi tensori sotto forma di matrice o anche sotto forma di vettori (voight).

Tensorial notation

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Voigt notation

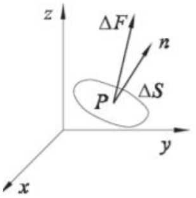
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

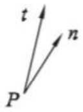


Consideriamo di avere un corpo continuo che indichiamo con Ω e consideriamo la superficie esterna e un vettore delle forze F applicate in un punto e un vettore delle forze applicate in un punto t e poi delle condizioni a contorno. Con b si indica la forza di volume, ovvero è la forza peso.
Vogliamo conoscere gli spostamenti u di ogni punto (si userà u per gli spostamenti lungo x, v lungo y e w lungo z) e poi vogliamo conoscere la distribuzione per ogni punto dello stress e delle deformazioni.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Ipotizziamo che abbiamo una superficie con un punto P in cui il versore è n. A questo punto la forza △F è concentrata nel punto P e possiamo descrivere il vettore t, detto versore delle tensioni, che è coniugato a n, come il limite di deltaF/deltaS, con deltaS superficie infinitesima.



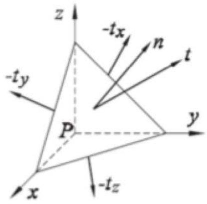


se vogliamo conoscere lo stato di tensione in un punto P dobbiamo conoscere lo stato di tensione per tutte le possibili coppie di versore t e n.

$$\{t\} = \{t_x\}n_x + \{t_y\}n_y + \{t_z\}n_z$$

$$\{t\} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\{t_x\}\{t_y\}\{t_z\}$$



$$\{t\} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\{\Delta F\}}{\Delta S}$$

coniugato a {n}

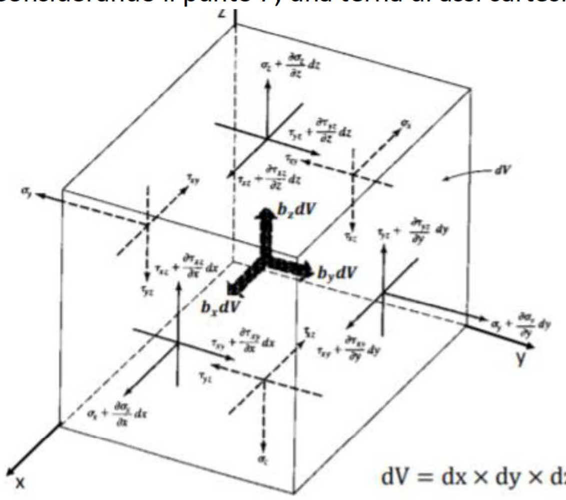
Con sigma si intendono le tensioni normali, mentre con tau si intendono le tensioni tangenziali; in questo modo si introduce il tensore dello stress (σ).

$$\{t\} = [\sigma]\{n\}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

Considerando il punto P, una terna di assi cartesiani e un cubo infinitesimi di lunghezza dx,dy e dz.



$$dV = dx \times dy \times dz$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

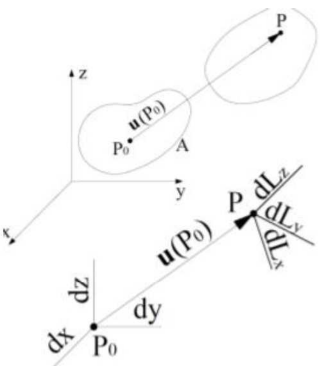
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Moltiplicando ogni componente per la propria superficie ci ricaviamo le cosiddette equazioni indefinite di equilibrio in cui bx, by e bz sono le forze di volume. Esse sono delle equazioni che devono essere rispettate da ogni punto. Andando a sviluppare le equazioni di equilibrio al momento ci ricaviamo la simmetrica, ovvero il fatto che tau di i,j è uguale a tau di j,i.

Equazioni di compatibilità



Consideriamo un corpo e consideriamo un punto P_0, quando il corpo subirà uno spostamento questo punto si troverà nel punto P.

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \qquad \{u(P_0)\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{Bmatrix}$$

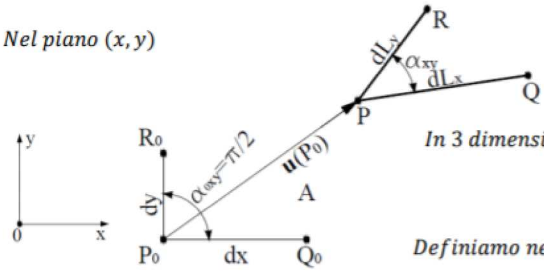
$$P(x, y, z)$$

Spesso si scrive u, v, w anziché u_x, u_y, u_z

dx,dy,dz sono una terna di elementi lineari, uscenti da P_0 e paralleli agli assi. Dopo la deformazione si trasformano in una terna di elementi dL_x dL_y e dL_z uscenti da P.

Ciascun elemento ha cambiato la lunghezza e le tre coppie di elementi non sono più ortogonali fra di loro.

Nel piano (x, y)



In 3 dimensioni, P, dL_x *e* dL_y *non stanno più in generale nel piano* (x, y)

Definiamo nel generico punto:

Dilatazioni lineari, le tre grandezze adimensionali , espressive del cambiamento di lunghezza

$$\varepsilon_{xx} = \frac{PQ - P_0Q_0}{P_0Q_0} = \frac{dL_x - dx}{dx} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{PR - P_0R_0}{P_0R_0} = \frac{dL_y - dy}{dy} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{PS - P_0S_0}{P_0S_0} = \frac{dL_z - dz}{dz}$$

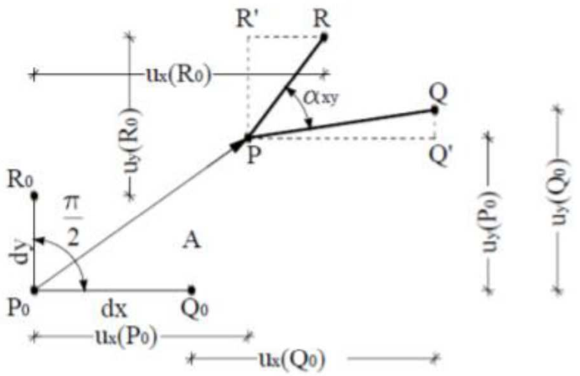
Dilatazioni angolari, le tre grandezze adimensionali , espressive del cambiamento degli angoli

$$\gamma_{xy} = \alpha_{0xy} - \alpha_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{xy} \qquad \gamma_{xz} = \alpha_{0xz} - \alpha_{xz} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{xz} \qquad \gamma_{yz} = \alpha_{0yz} - \alpha_{yz} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{yz}$$

Credits: Prof. A. Corsanego

Le dilatazioni sono delle grandezze adimensionali.
Mentre le dilatazioni lineari ci danno un'idea di cambiamento di lunghezza, le dilatazioni angolari ci danno un'idea di cambiamento di forma.
Definiamo il vettore spostamento u lungo i tre assi.

Ipotizziamo spostamenti, e relative derivate, infinitesimi (configurazione deformata molto "vicina" a quella indeformata)

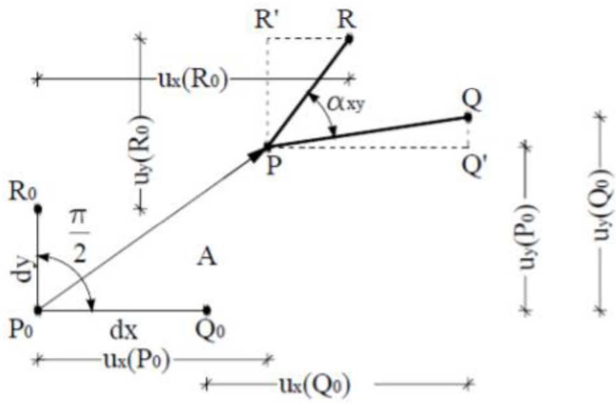


- $dL_x \cong dx + u_x(Q_0) - u_x(P_0) = dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0} dx \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{dL_x - dx}{dx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0}$

- $\frac{\pi}{2} - \alpha_{xy} = Q'\hat{P}Q + R\hat{P}R' \cong \frac{[u_y(Q_0) - u_y(P_0)]}{dx} + \frac{[u_x(R_0) - u_x(P_0)]}{dy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{P_0}$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{P_0}$$

(e analoghe)



$$u_x(Q_0) = u_x(x + dx, y, z) = u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0} dx$$

$$u_y(Q_0) = u_y(x + dx, y, z) = u_y(P_0) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{P_0} dx$$

$$u_x(R_0) = u_x(x, y + dy, z) = u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{P_0} dy$$

(e analoghe)

Da questi calcoli ci ricaviamo la seguente matrice di spostamenti infinitesimi.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Spostamenti infinitesimi

Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive non sono altro che le relazioni tra le tensioni e le deformazioni. Ipotizzando materiali lineari e isotropi, possiamo legare tensioni e deformazioni in una matrice detta matrice del materiale.
Per fare questa matrice ci bastano solo due parametri che sono il modulo di Young E e il coefficiente di Poisson υ.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

[D] : matrice del materiale

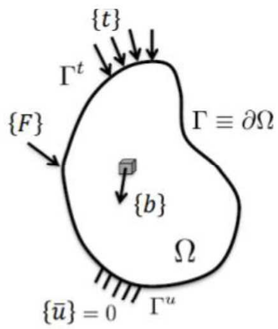
Materiale omogeneo isotropo ed elastico lineare. Bastano 2 parametri del materiale, ad esempio E (modulo di Young) e υ (coefficiente di Poisson).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

One Dimension

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \xleftrightarrow{\text{Equazioni di compatibilità}} \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \xleftrightarrow{\text{Equazioni costitutive}} \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$



Formulazione forte:

Equazioni di compatibilità: $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \forall P \in \Omega$$

Equazioni costitutive: $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$

Equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad \forall P \in \Omega$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \{u\} = \{\bar{u}\} & \forall P \in \Gamma^u \\ [\sigma]\{n\} = \{\bar{t}\} & \forall P \in \Gamma^t \end{cases}$$

Lezione 2.2

Nel metodo degli elementi finiti andiamo ad utilizzare delle soluzioni approssimate.
Andremo a discretizzare il nostro corpo in tanti elementini all'interno dei quali andiamo a ipotizzare delle soluzioni approssimate e inoltre applicheremo il principio dei lavori virtuali invece di andare a descrivere le equazioni di equilibrio.