Centro Stampa

N° 4411

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
TEORIA ESERCIZI TEMI ESAME 2021-22

DI MURATORE LUIGI

luigi.garibaldi@polito.it

noi		
1	1	Cinematica
2	2	Statica - dinamica
7	3	Attrito
3	4	Componenti meccanici
4	5	Trasmissione del moto
5	6	Transitori sist. mecc. rotanti
6	7	Vibrazioni
8	8	Supporti lubrificati

Esame

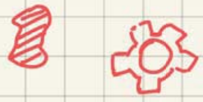
3 esercizi + 1 dom. teoria 33 punti

Cinematica

Moto dei corpi a prescindere dalle forze che agiscono su essi.

- PUNTO MATERIALE · infinitesimo
- CORPI PIANI
- CORPI SOLIDI

} rigidi o flessibili (deformabili) → spugna

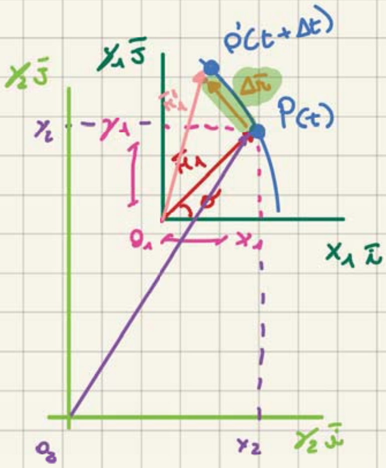


distanze costanti ↑ PIANI - RIGIDI

SOLIDI (nello spazio)

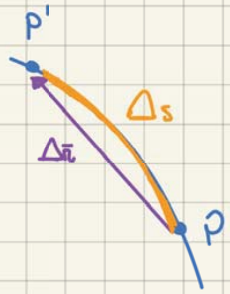
moto del punto mat. nel piano

coordinate < CARTESIANE, POLARI, CURVILINEE (?)



$P(x_1, y_1)$ cartesiani

$P(r_1, \theta)$ polari



$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ vettori

A, B, C oppure $|\bar{A}|, |\bar{B}|, |\bar{C}|$ moduli dei vettori

$\bar{r}_1' = \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}$

$\bar{r}_2' = \bar{r}_2 + \Delta \bar{r}$

Se $\Delta t \to 0$ $\quad |\Delta \bar{r}| \to \Delta s$

$|\Delta \bar{r}| \neq \Delta s$

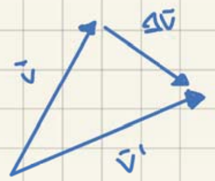
Δs è scalare

quindi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \dot{\bar{r}}$$ velocità istantanea

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\dot{\bar{r}}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a}$$ acc. istantanea

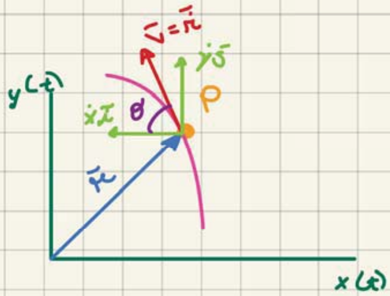
$\bar{v}_m = \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ velocità media $\qquad \bar{a}_M = \dfrac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$ accelerazione media



$\Delta \bar v$ <
- cambia modulo
- cambia direzione

La componente dovuta alla direzione è sempre verso il centro curvatura

cambio direzione = acc. centripeta
cambio modulo = acc. tangenziale



$\bar r = x\bar i + y\bar j$

sono fissi

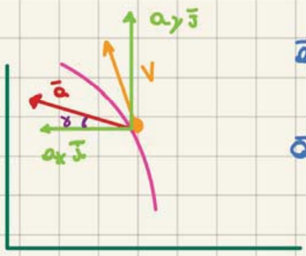
$$\bar v = \dot{\bar r} = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar i + \underbrace{\cancel{x\frac{d\bar i}{dt}}}_{0} + \frac{dy}{dt}\bar j + \underbrace{\cancel{y\frac{d\bar j}{dt}}}_{0}$$

solo perché siamo in coordinate cartesiane

$\bar v = \dot{\bar r} = \dot x\bar i + \dot y\bar j = v_x\bar i + v_y\bar j = \bar v_x + \bar v_y$ velocità nelle 2 direzioni

$v = |\bar v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ modulo

$\theta = tg^{-1}\frac{v_y}{v_x}$ direzione



$\bar a = \frac{d\bar v}{dt}$

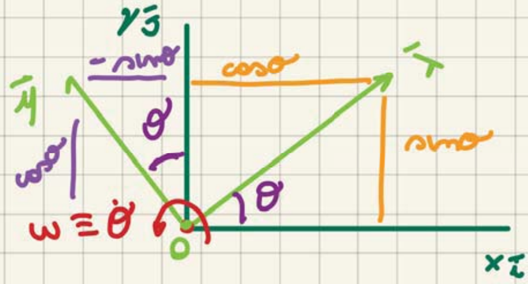
$$\bar a = \frac{d\, v_x\bar i}{dt} + \frac{d v_y\bar j}{dt} = \dot v_x\bar i + \dot v_y\bar j = a_x\bar i + a_y\bar j$$

$a = |\bar a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ modulo

$\gamma = tg^{-1}\frac{a_y}{a_x}$ direzione

Derivata del versore

$$\bar\lambda = \cos\theta\,\bar i + \sin\theta\,\bar j$$



$$\frac{d\bar\lambda}{dt} = \dot\theta(\underbrace{-\sin\theta\,\bar i + \cos\theta\,\bar j}_{\bar\mu}) = \dot\theta\bar\mu = \omega\bar\mu$$

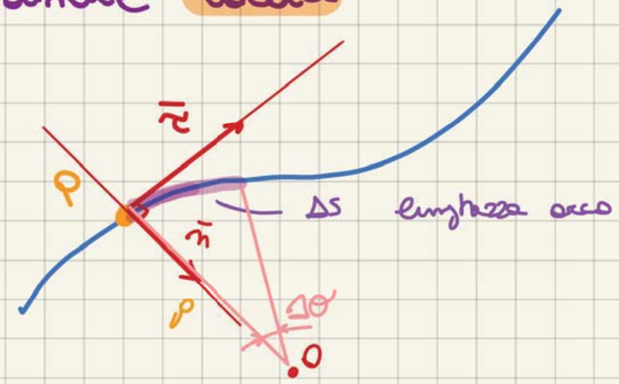
$$\frac{d\bar\mu}{dt} = -\omega\bar\lambda = -\dot\theta\bar\lambda$$

antiorario = uscente $\odot$

orario = entrante $\otimes$

mano destra

Coordinate locali



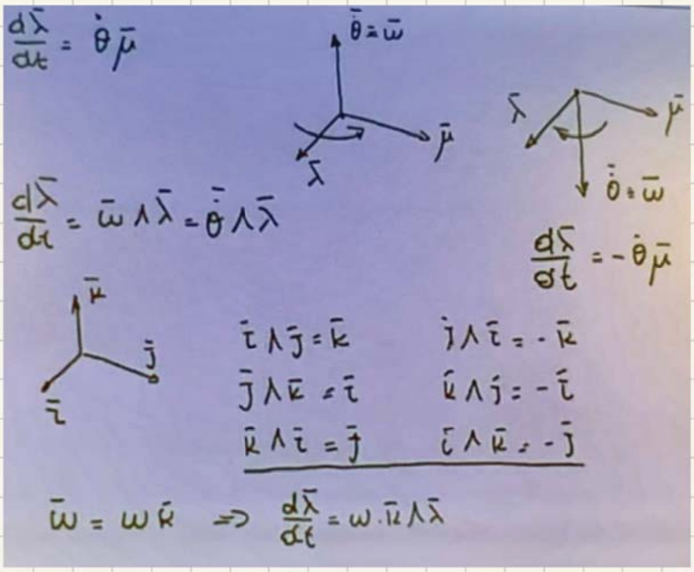
$$\Delta s = \rho \cdot d\theta$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

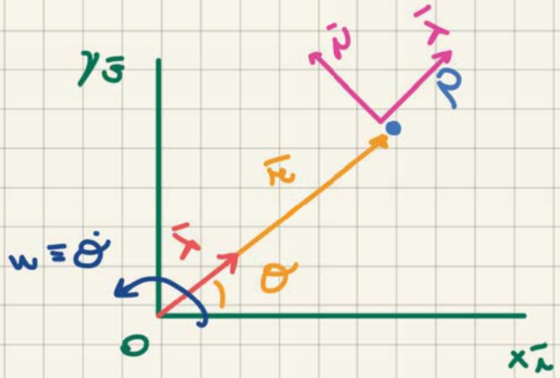
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho\frac{d\theta}{dt} = \rho\dot\theta \qquad \bar v = \rho\dot\theta\,\bar\tau$$

$$\bar a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\rho\dot\theta\bar\tau)}{dt} = \rho\ddot\theta\,\bar\tau + \rho\dot\theta\frac{d\bar\tau}{dt} = \underbrace{\rho\ddot\theta\,\tau}_{a_T} + \underbrace{\rho\dot\theta^2\,\bar n}_{a_c}$$

a_T = tangenziale $\qquad$ a_c = centripeda



Coordinate polari



$P(r, \theta)$

$\bar{r} = r \cdot \bar{\lambda}$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d(r\bar{\lambda})}{dt} = \dot{r}\bar{\lambda} + r\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \dot{r}\bar{\lambda} + r\dot{\theta}\bar{\nu} = \underbrace{\dot{r}\bar{\lambda}}_{\text{vel radiale}} + \underbrace{r\omega\bar{\nu}}_{\text{velocità tangenziale}}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\dot{\bar{r}}}{dt} = \ddot{r}\bar{\lambda} + \dot{r}\frac{d\bar{\lambda}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\nu} + r\ddot{\theta}\bar{\nu} + r\dot{\theta}\frac{d\bar{\nu}}{dt} =$$

$$= \ddot{r}\bar{\lambda} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\nu} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\nu} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\bar{\lambda}$$

$\bar{n} = -\bar{\lambda}$

$$\bar{a} = (\underbrace{\ddot{r}}_{\text{acc. radiale}} - \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{\text{acc. centripeta}})\bar{\lambda} + (\underbrace{r\ddot{\theta}}_{\text{acc. tangenziale}} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{\nu}$$

acc. centripeta $\equiv r\dot{\theta}^2\bar{m}$

$2\dot{r}\dot{\theta}$: acc. CORIOLIS

↓

solo se il SdR ruota

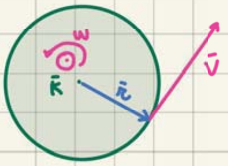
e ...

MOTI CARATTERISTICI

CIRCOLARE

ruota con raggio costante

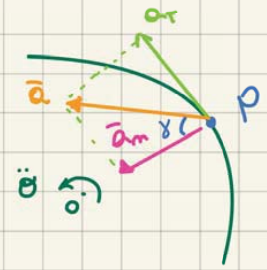
$$\bar{v} = \underset{cost=0}{\dot{r}}\bar{\lambda} + r\dot{\theta}\bar{\mu} \longrightarrow \bar{v} = r\dot{\theta}\mu = r\omega\bar{\mu} = \omega \wedge r$$



$$\bar{a} = \underbrace{-r\dot{\theta}^2\bar{\lambda}}_{rad} + \underbrace{r\ddot{\theta}\bar{\mu}}_{tan} = a_m\bar{\lambda} + a_T\bar{\mu}$$

$$\bar{a} = \sqrt{a_m^2 + a_T^2}$$

$$\gamma = tg^{-1}\frac{a_t}{a_m} = tg^{-1}\frac{r\ddot{\theta}}{r\dot{\theta}^2} = tg^{-1}\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2}$$



RETTILINEO

uniforme $\quad a = 0 \quad v = cost$

uniform. accelerato $\quad a = cost$

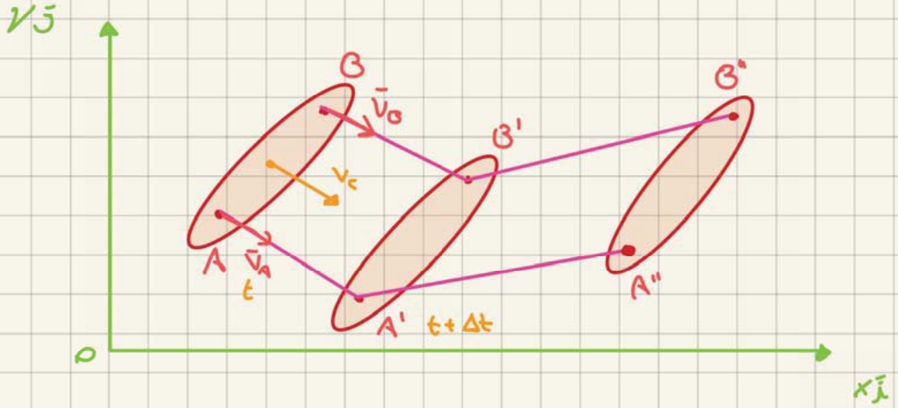
$$v = cost = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \longrightarrow x(t) - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

MOTI

- traslatorio (non è detto che sia rettilineo) → Parallelo a se stesso, traiettoria mista
- Rotatorio
- Moto piano generico



$AA' = BB'$ $\qquad \bar{V}m_A = \dfrac{\overline{AA'}}{\Delta t}$ $\qquad \bar{V}m_B = \dfrac{\overline{BB'}}{\Delta t}$

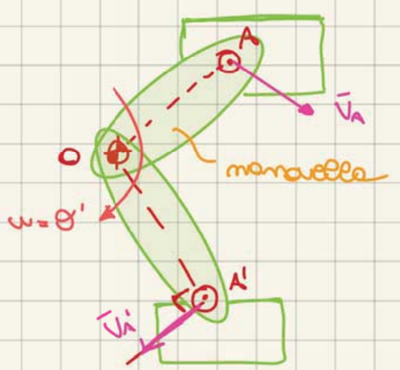
$$\left.\begin{aligned} \bar{V}_A &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} \\ \bar{V}_B &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{BB'}}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \boxed{\bar{V}_A = \bar{V}_B}$$

traiettoria → linea mista

O cerniera fissa

A cerniera mobile

Pedale bici

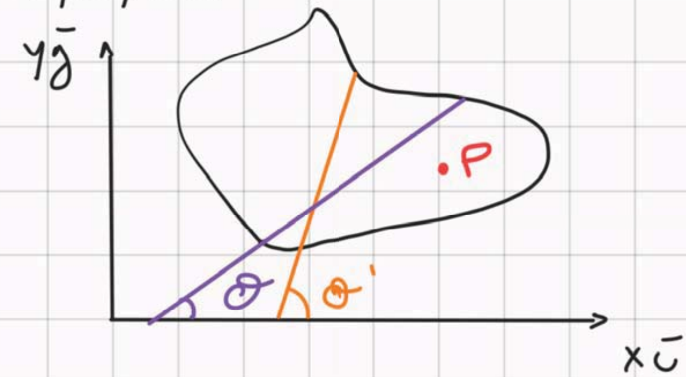


$r = \bar{OA}$

$OA = |\bar{OA}| = r$

$\bar{V}_A = \bar{\omega} \wedge \bar{r} = \bar{\omega} \wedge \bar{OA}$

9/3/22



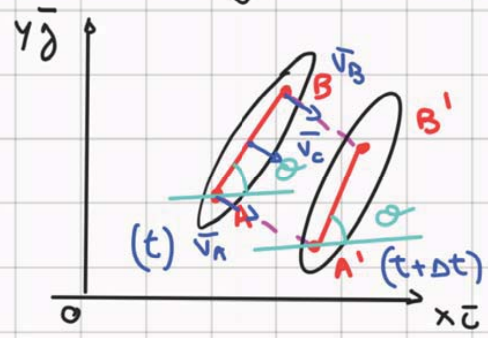
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} = \omega$$

CORPO RIGIDO

1 • TRASLATORIO (non rettilineo per forza)
2 • ROTATORIO
3 • MOTO PIANO GENERICO

① MOTO TRASLATORIO

preso un segmento sul corpo resterà sempre parallelo a se stesso



$AA' = BB'$ $\qquad \bar{V}_{MA} = \frac{\overline{AA'}}{\Delta T}$

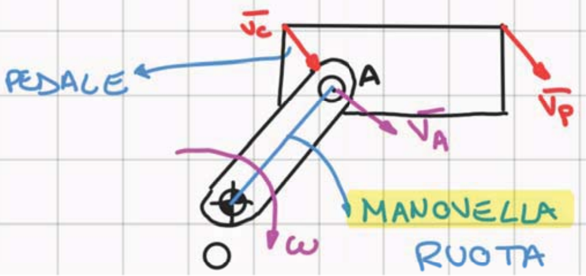
$\bar{V}_{MB} = \frac{\overline{BB'}}{\Delta T}$

TRAIETTORIA: linea mista

$$\left.\begin{aligned} \bar{V}_A &= \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta T} = \bar{V}_A \\ \bar{V}_B &= \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\overline{BB'}}{\Delta T} = \bar{V}_B \end{aligned}\right\} \boxed{\bar{V}_A = \bar{V}_B}$$

esempio: PEDALE BICICLETTA

O (⌖ cerniera fissa)
A (⊙ cerniera mobile)



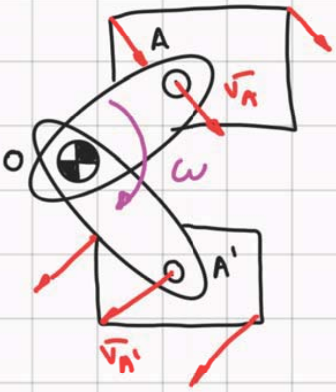
$\bar{r} = \overline{OA}$ $\qquad r = OA - |\overline{OA}|$ (lunghezza)

(un punto fisso e uno mobile → cerniere)

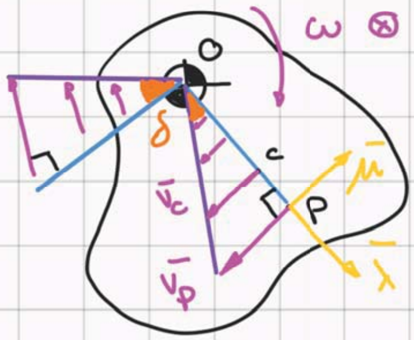
PEDALE $\quad \bar{V}_A = \bar{\omega} \wedge \bar{r} = \bar{\omega} \wedge \overline{OA}$ (non inclina la sua posizione)

→ MOTO TRASLATORIO

A : estremo manovella ma anche punto del pedale



2 MOTO ROTATORIO RISPETTO AD UN ASSE FISSO



$\bar{V}_P = \bar{\omega} \wedge \overline{OP} \qquad OP = cost$

COORDINATE POLARI

$$\bar{V}_P = \underbrace{\cancel{\dot{r}}}_{=0}\bar{\lambda} + r\dot{\theta}\bar{\mu}$$

$$\bar{V}_P = r\dot{\theta}\bar{\mu}$$

$$\bar{V}_c = \bar{\omega} \wedge \overline{Oc}$$

TRIANGOLO DELLE VELOCITÁ

velocitá proporzionali alla distanza dal centro

$$\delta = tg^{-1}\frac{VP}{OP} = tg^{-1}\frac{OP.\omega}{OP} \qquad \boxed{\delta = tg^{-1}\omega}$$

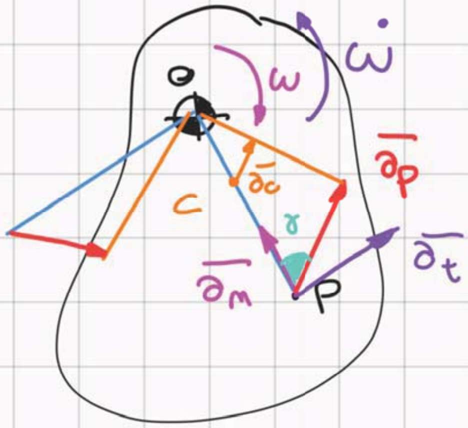
Accelerazioni

$$\overline{OP} = (\underbrace{\cancel{\ddot{r}}}_{=0} - r\dot{\theta}^2)\bar{\lambda} + (r\ddot{\theta} + 2\underbrace{\cancel{\dot{r}}}_{=0}\dot{\theta})\bar{\mu}$$

(corpo rigido)

$$= -r\dot{\theta}^2\bar{\lambda} + r\ddot{\theta}\bar{\mu} = r\dot{\theta}^2\bar{n} + r\ddot{\theta}\bar{\mu}$$

$$\overline{a_p} = \overline{a_m} + \overline{a_t}$$



(oggetto che ruota in senso orario ma sta frenando)

$$\overline{a_p} = \overline{a_m} + \overline{a_t} = r\,\dot{\theta}^2\,\overline{m} + r\,\ddot{\theta}\,\overline{\mu}$$

entrambe dipendenti da r

TRIANGOLO DELLE ACCELERAZIONI

$$\gamma = tg^{-1}\frac{a_t}{a_m} = tg^{-1}\frac{r\ddot{\theta}}{r\dot{\theta}^2}$$

Se $\boxed{\gamma = 0}$ $\ddot{\theta} = 0$ moto rotatorio rispetto asse fisso

ω: cost

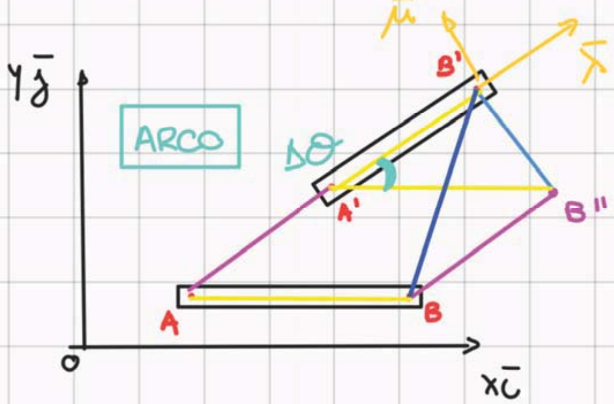
$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq +\frac{\pi}{2}$$

$\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ $\ddot{\theta} \neq 0$ $\dot{\theta} = 0$ MOTO INCIPIENTE

moto che sta per succedere → ISTANTE INIZIALE

③ MOTO PIANO GENERICO

composizione di moti **MOTO TRASLATORIO + ROTATORIO**



$\overline{BB'} = \overline{BB''} + \overline{B''B'}$

$\overline{BB''} = \overline{AA'}$

$$\overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{B''B'} = \overline{AA'} + l \cdot \Delta\theta\, \bar{\mu}$$

$$\bar{V}_B = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{BB'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l \Delta\theta}{\Delta t} \bar{\mu}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \underbrace{l \dot{\theta}\, \bar{\mu}}_{\text{ROTAZIONE RIGIDA DI B RISPETTO AD A}} = \bar{V}_A + \bar{\omega} \wedge \overline{AB}$$

$$\boxed{\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \wedge \overline{AB}}$$

FONDAMENTALE: $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A}$

velocità di B rispetto ad A

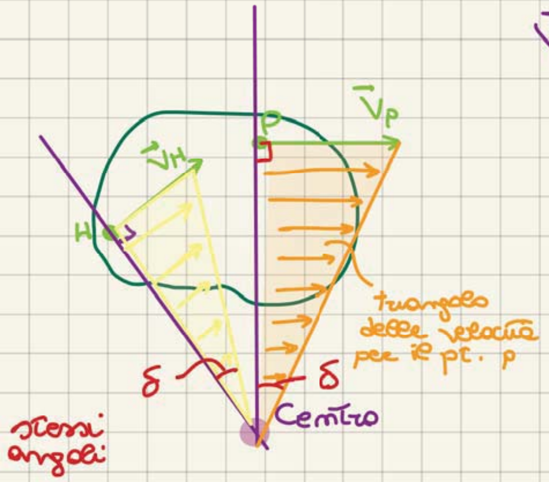
8/03/22

Moti

- traslatorio $\omega = 0$
- rotatorio asse fisso
- Moto piano generico → ROTAZIONE + TRASLAZIONE

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}\end{aligned}\right\} \text{Th fondamentale}$$

$$\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_{AB}$$



$\vec{V}_P$ rotazione secondo un altro punto

$$\vec{V}_P = \omega \wedge C_P$$

punto sulla perpendicolare di $\vec{V}_P$
centro delle velocità

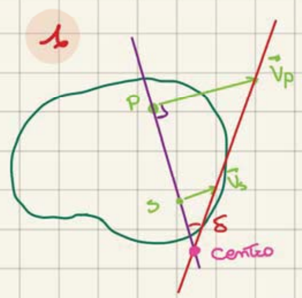
$$\vec{V}_H = \omega \wedge C_H$$

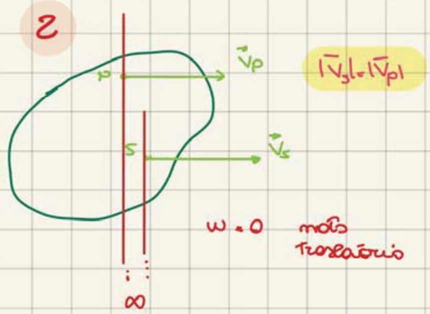
⊥ alla $\vec{V}_H$

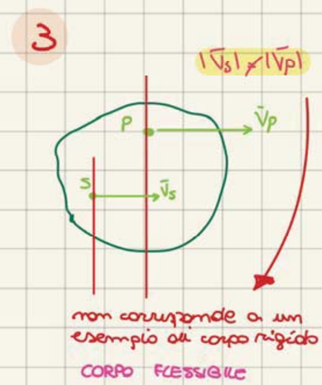
$$\frac{V_P}{|\overline{P_C}|} = \frac{V_H}{|\overline{H_C}|}$$

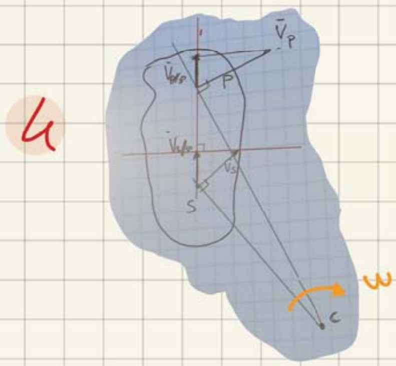
Il centro delle velocità vale in un determinato istante
Può stare dentro o fuori
Si muove ogni istante

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE







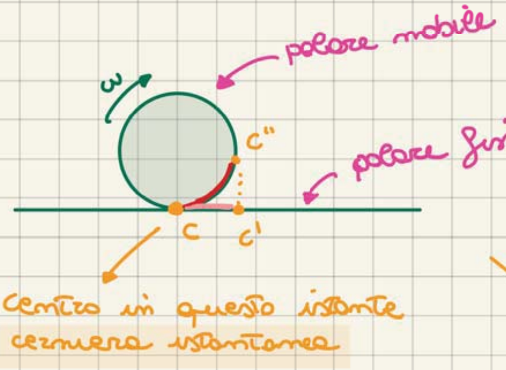


La proiezione di vp sulla retta SP, purché il sistema non sia flessibile la velocità di p lungo s deve essere uguale alla velocità di a lungo p

$$\omega = \frac{V_P}{P_C} = \frac{V_S}{S_C} \rightarrow \omega = \frac{V_P}{P_C}$$

L'insieme dei punti che rappresentano i centri delle velocità istante per istante assumono il nome di POLARE FISSA e POLARE MOBILE

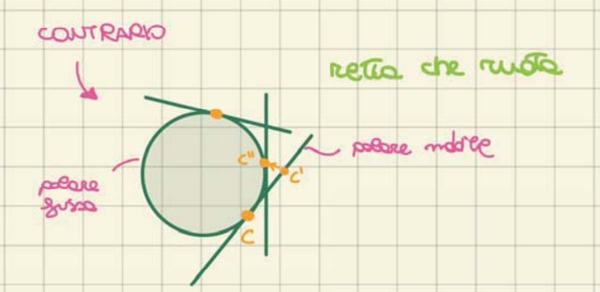
FISSA luogo dei punti sul piano fisso
MOBILE sul piano mobile

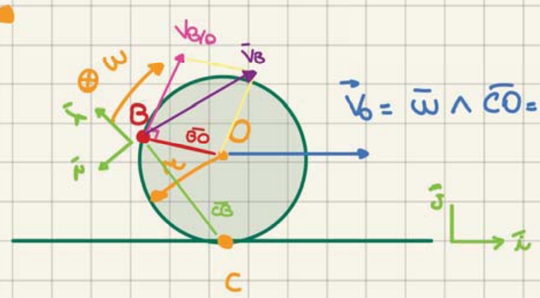


$$|\overline{CC'}| = \overset{\frown}{CC''}$$

ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO

ROTOLAMENTO CINEMATICO





$$\vec V_O = \bar\omega \wedge \bar{CO} = \omega\cdot r\cdot\bar i$$

$$\bar V_B = \vec V_O + \vec V_{B/O} = \bar\omega\wedge\bar{CO} + \omega\wedge\bar{OB}$$

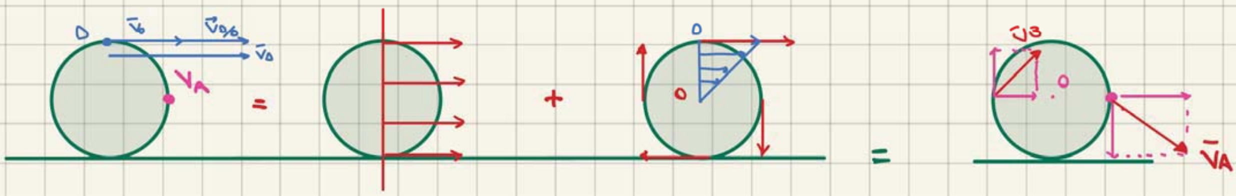
velocità di B rispetto a O

$$\bar V_C = \bar V_O + \bar V_{C/O} = 0 = \omega r\bar i - \omega r\bar j = 0$$

$$\bar V_B = \omega\cdot r\cdot\bar i + \omega\cdot r\cdot\bar j$$

oppure

$$\bar V_B = \bar\omega\wedge\bar{CB} = \underbrace{\sqrt2}_{\text{quadrato}}\cdot r\cdot\omega\,(-\bar\mu)$$

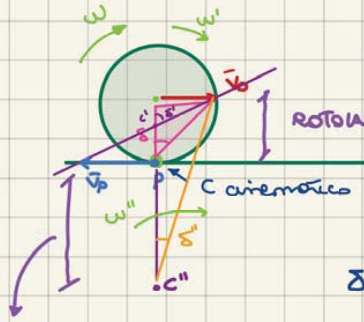


$$\bar V_A = \bar V_O + V_{A/O}$$

$$\bar V_D = \bar\omega\wedge\bar{CD} = \omega\cdot 2r\cdot\bar i = 2\bar V_O = 2\omega r\hat i$$

Il punto superiore ha una velocità relativa rispetto all'aria pari a due volte la velocità della vettura

Polare fissa che non striscia sulla polare mobile → ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO



$\delta' = tg^{-1}(\omega')$ $\bar V_P = \bar\omega' \wedge \overline{C'P}$

ROTOLA e STRISCIA $\omega' > \omega R$ cinematica

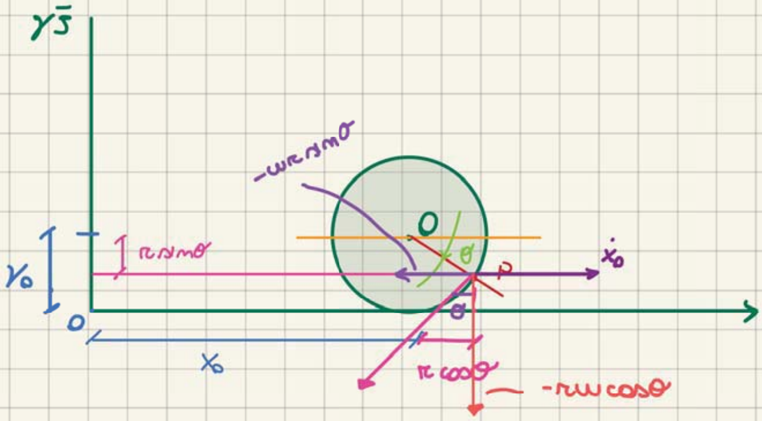
$\delta'' = tg^{-1}(\omega'')$

la ruota ROTOLA e STRISCIA $\omega'' < \omega R$ cinematico

- Se $OC' < OC$ la ruota gira più velocità del caso senza strisciamento
  con C cinematico

- Se $C''' = 0$ rotolamento nullo (striscia e ruota su se stessa) $\vec V_0 = 0$

Derivazione delle coordinate



$G_0 = x_0 ; y_0$

$P = x_P ; y_P$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$

$x_P = x_0 + R\cos\theta$

$y_P = y_0 - R\sin\theta = R(1 - \sin\theta)$

velocità

$V_{x_P} = \dot x_P = \dot x_0 - R\omega \sin\theta$

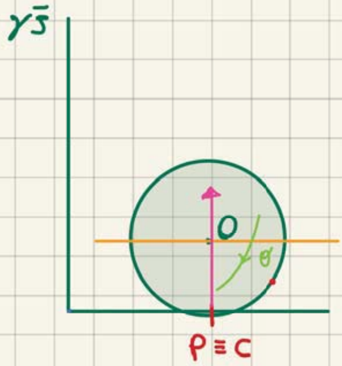
$V_{y_P} = \dot y_P = \boxed{-R\omega\cos\theta} \longrightarrow \dot{\bar y}_P = \cancel{\dot{\bar y}_0}^{=0} + \bar V_{P/O}$

accelerazioni

$$\dot{V}_{xp} = a_{xp} = \ddot{x}_p = \ddot{x}_0 - r\dot{\omega}\sin\theta - r\omega^2\cos\theta = a_p\bar{i}$$

$$\dot{V}_{yp} = a_{yp} = \ddot{y}_p = -r\dot{\omega}\cos\theta + r\omega^2\sin\theta = a_p\bar{j}$$

per $\theta = \frac{\pi}{2}$ cioè $P \equiv C$



$$x_p = x_0 + r\cancelto{0}{\cos\theta} = x_0$$

$$y_p = y_0 - r\sin\theta = r(1 - \cancelto{1}{\sin\theta}) = 0$$

$$V_{xp} = \dot{x}_p = \dot{x}_0 - r\omega\cancelto{1}{\sin\theta} = \dot{x}_0 - r\omega = 0$$

$$V_{yp} = \dot{y}_p = -r\omega\cancelto{0}{\cos\theta} = 0$$

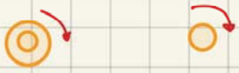
$$\dot{V}_{xp} = a_{xp} = \ddot{x}_p = \ddot{x}_0 - r\dot{\omega} = 0$$

$$\dot{V}_{yp} = a_{yp} = \ddot{y}_p = r\omega^2 \neq 0$$

dotato di accelerazione verso l'alto

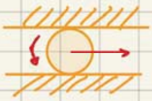
Vincoli cinematici

Esaminiamo gdl nel piano e spazio

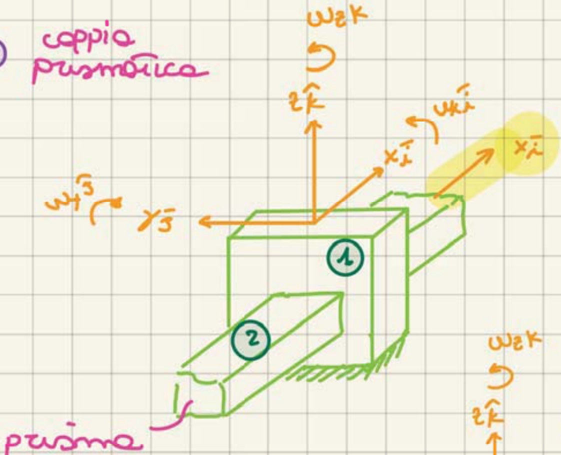
			gdl vincolati	gdl liberi
• CERNIERA FISSA			x, y	θ
• CERNIERA MOBILE			x, y relativi	θ relativa

gdl → 3-2 = 1

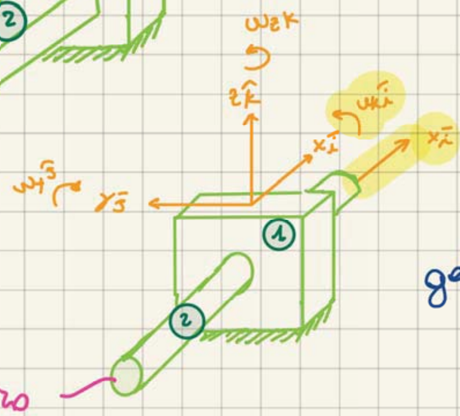
gdl = (3·2) - 2 - 2 = 2

		gdl vincolati	gdl liberi
• COPPIA PRISMATICA		y, θ	x
• GUIDA DI FAIRBAIN (Glifo)		y	x, θ

○ coppia prismatica

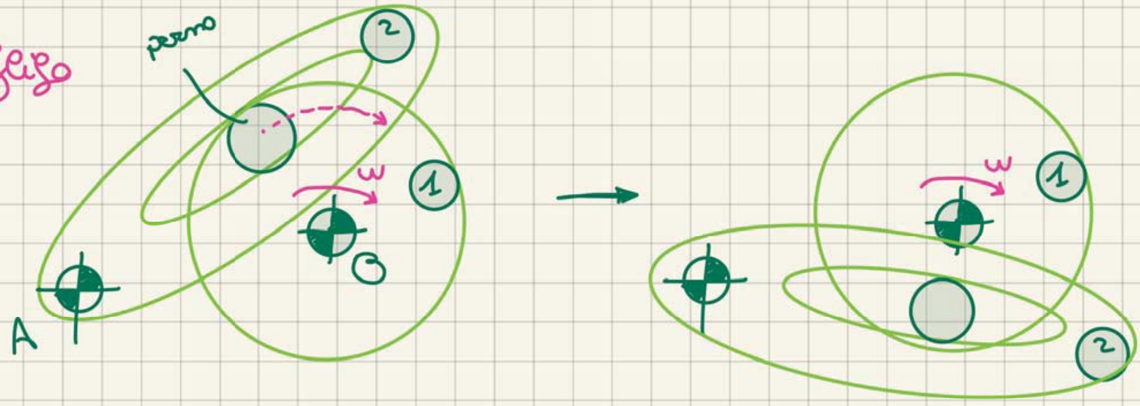


$$gdl_2 = 6 - 5 = 1 \quad (x\bar{i})$$



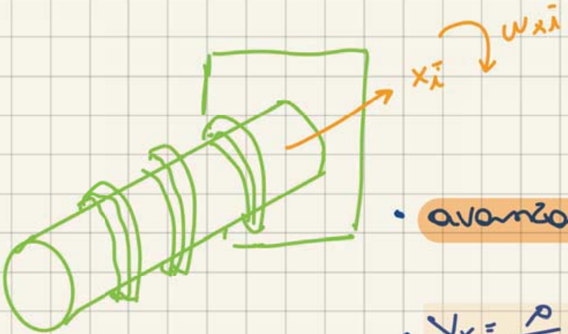
$$gdl_2 = 6 - y\bar{j} - z\bar{k} - \omega_z\bar{k} - \omega_y\bar{j} = 2$$

○ Glifo



$$gdl = 3_{(1)} + 3_{(2)} - 2_{(A)} - 2_{(B)} - 1_{(glifo)} = 1$$

- ACCOPPIAMENTO VITE - MADREVITE — 1 gdl



- avanzamento legato alla rotazione

- $V_x = \dfrac{p}{t} \rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{t}$

$$\frac{V_x}{p} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \left[V_x = \frac{\omega \cdot p}{2\pi} \right]$$

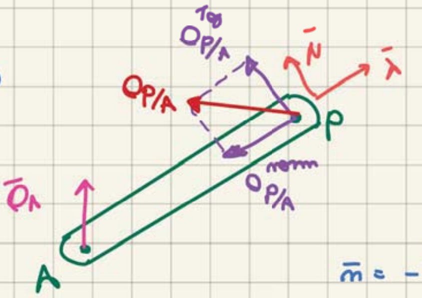
Teorema fondamentale della cinematica per le accelerazioni

Teorema di Rivals

$$\bar{O}_P = \bar{O}_A + \bar{O}_{P/A}$$ uguale all'altro

$$\bar{O}_P = \bar{O}_A + \bar{O}_{P/A}^{norm} + O_{P/A}^{tg}$$

$$= \bar{O}_A + AP\omega^2\bar{m} + r\dot{\omega}\bar{\mu}$$

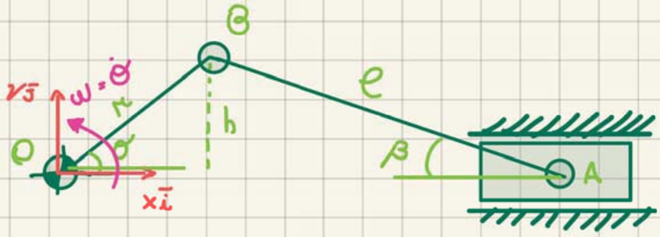


$\bar{m} = -\bar{\lambda}$

costruisco

Se $\bar{O}_A = 0 \rightarrow \bar{O}_P = \bar{O}_{P/A}^{norm} + O_{P/A}^{tg}$

BIELLA - MANOVELLA



O cerniera fissa

A e B cerniere mobili

OB MANOVELLA

B BOTTONE DI MANOVELLA

BA BIELLA (collegata a 2 cerniere mobili)

B testa di biella

A piede di biella

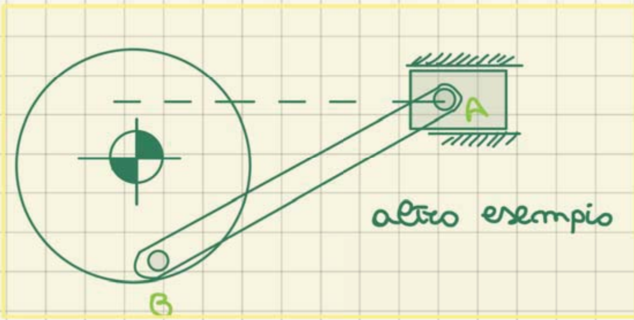
$\beta = ?$ $\qquad \dfrac{l}{\sin\theta} = \dfrac{r}{\cos\theta} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{r}{l}\right)\sin\theta$

$h = r\sin\theta = r\sin\beta$

$OA = r\cos\theta + l\cos\beta$

GdL → $3 \cdot 3 = 9$ se i nostri sistemi fossero senza vincoli cinematici

REALI → $9 - \underbrace{(2\cdot 3)}_{\text{cerniere}} - \underbrace{2}_{\text{coppia prismatica}} = 1$



Noti:

$\omega \odot =$ costante

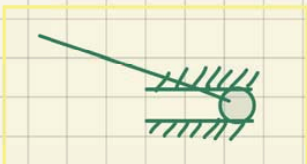
$\dot{\omega} = 0$

θ, r, l

Altra rappresentazione

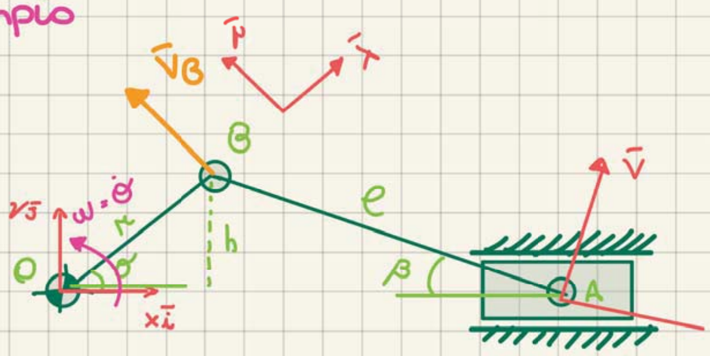
GLIFO

oppure



GdL $= \underbrace{(2\cdot 3)}_{\text{cerniera}} - \underbrace{(2\cdot 2)}_{\text{glifo}} - 1 = 1$

Esempio



Calcolare

$\omega, \dot{\omega}$

$\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}$

V_A, V_B, a_A, a_B

1 - CALCOLO DELLE **GEOMETRIE**

2 - CALCOLO DELLE **VELOCITÀ** ANGOLARI E LINEARI

3 - CALCOLO DELLE **ACCELERAZIONI** ANGOLARI E LINEARI

VELOCITÀ → 3 metodi

1. fondamentale cinematica (vettori)
2. Centro delle velocità
3. Derivando le posizioni 1 e 2 volte

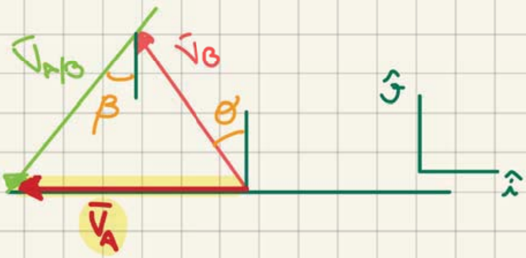
1 fondamentale cinematica (vettori)

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{V}_{A/B}$$

	$\bar{V}_A$	$\bar{V}_B$	$\bar{V}_{A/B}$
Modulo		ωr	
Direzione	// OA	⊥ OB	⊥ AB
Verso	$-\hat{\lambda}$	$+\hat{\mu}$	$-\hat{\nu}$

$$\bar{V}_B = \bar{\omega} \wedge \overline{OB}$$

$$\bar{V}_{A/B} = \dot{\bar{\beta}} \wedge \overline{BA}$$



Teorema dei seni

$$\frac{V_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{V_{A/B}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{V_A}{\sin(\beta + \theta)}$$

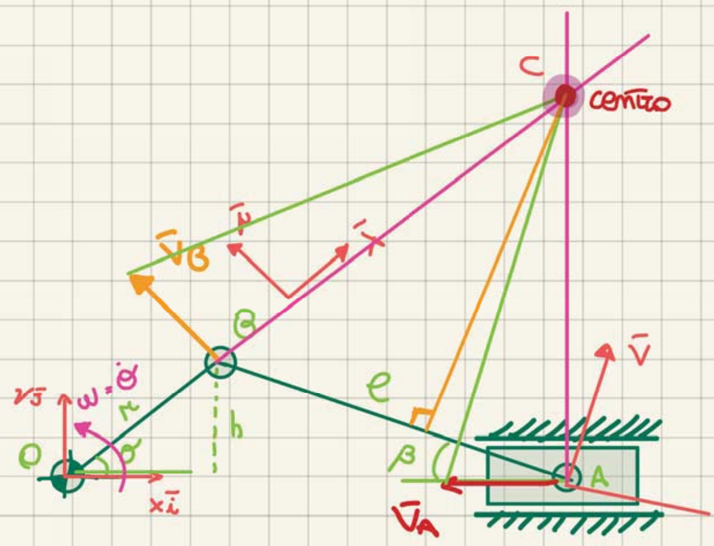
$$V_A = \frac{V_B}{\cos\beta} \cdot \sin(\beta + \theta) = \omega r \cdot \frac{\sin(\beta + \theta)}{\cos\beta}$$

$$V_{A/B} = \frac{V_B}{\cos\beta} \cdot \cos\theta = \dot{\beta} l \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{\omega r \cos\theta}{l \cos\beta}$$

⊙ NO

⊗ ✓

2 Centro delle velocità



C centro delle velocità

$\bar V_B \cdot C$ → triangolo velocità

la faccio in A e C → trovo $\bar V_A$

posso farlo anche per baricentro G

$$\bar V_A = \dot\beta \wedge \overline{CA}$$

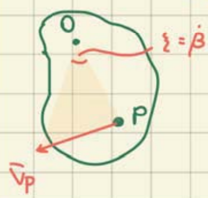
$$\bar V_B = \dot\beta \wedge \overline{CB}$$

$\xi = \dot\beta$ velocità angolare biella

$$CA = OA + tg\theta$$

$$CO = \frac{OA}{\cos\theta}$$

Richiamo



$\bar V_P = \dot\beta \cdot \overline{OP}$

$\xi = tg^{-1}\frac{V_P}{OP} = tg^{-1}\frac{\dot\beta OP}{OP} = tg^{-1}\dot\beta$

$\overline{CB} = \overline{CO} - r$ → quello che ci serve

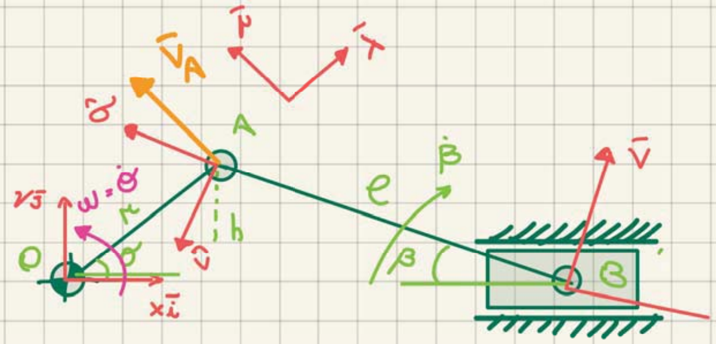
$$OA = r\cos\theta + l\cos\beta$$

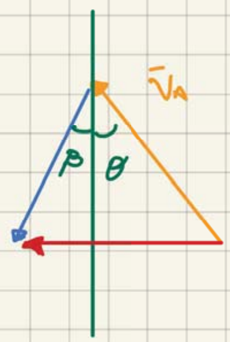
$$CB = \frac{r\cos\theta + l\cos\beta}{\cos\theta} - r$$

$$V_B = \dot\beta\left(\frac{r\cos\theta + l\cos\beta}{\cos\theta} - r\right) = \dot\beta\left(\frac{l\cos\beta}{\cos\theta}\right)$$

$$V_B = \dot\beta\,\frac{l\cos\beta}{\cos\theta} \quad [rad/s \cdot m] \rightarrow \boxed{\frac{V_B\cos\theta}{\cos\beta} = V_{A/B} = \dot\beta l} \qquad \bar V_A = \bar{\dot\beta} \wedge \overline{CA}$$

$$\dot\beta = \frac{V_B\cos\theta}{l\cos\beta} \longrightarrow V_B = \bar{\dot\beta} \wedge \overline{CB} \quad \otimes$$





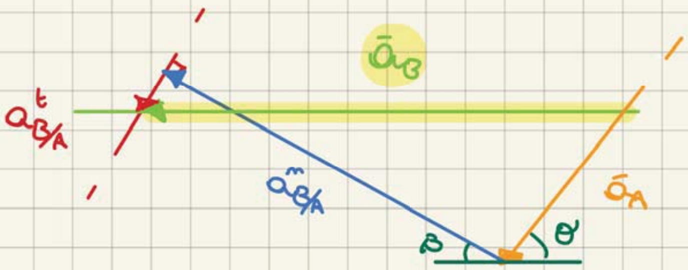
velocità e accelerazioni

$\bar V_B = \bar V_A + \bar V_{B/A}$

$w = cost \to \dot w = 0$

$\bar a_B = \bar a_A + \bar a^n_{B/A} + \bar a^t_{B/A}$

$\bar a_B$	$\bar a_A$	$\bar a^n_{B/A}$	$\bar a^t_{B/A}$
?	$\omega^2 r$	$\dot\beta^2 l$	$\ddot\beta l$
// OB	// AO	// AB	$\perp$ AB
?	$-\hat\lambda$	$\hat\gamma$	?



Proiezioni

$-\bar a_A \sin\theta + \bar a^n_{B/A} \sin\beta - a^t_{B/A} \cos\beta = 0$ verticale

$-\omega^2 r \sin\theta + \dot\beta^2 l \sin\beta - \ddot\beta l \cos\beta = 0$

$$\ddot\beta = \frac{\dot\beta^2 l \sin\beta - \omega^2 r \sin\theta}{l\cos\beta}$$

$\bar a^t_{B/A} = \ddot{\bar\beta} \wedge \bar{AB}$ $\quad \ddot\beta \otimes$

$-\omega^2 r \sin\theta + \dot\beta^2 l \sin\beta + \ddot\beta l \cos\beta = 0$

$$\ddot\beta = \frac{\omega^2 r \sin\theta - \dot\beta^2 l \sin\beta}{l\cos\beta} < 0$$

Piede di biella

(x) $x_B = r\cos\theta - l\cos\beta$

(y) $y_B = r\sin\theta - l\sin\beta$

$\dot x_B = V_{x_B} = -\omega r \sin\theta - \dot\beta l \sin\beta$

$\dot y_B = V_{y_B} = \omega r \cos\theta - \dot\beta l \cos\beta = 0 \to \boxed{\dot\beta = \frac{\omega r \cos\theta}{l \cos\beta}}$

$a_{x_B} = \dot V_{x_B} = -\cancel{\dot\omega}^{\,0} r \sin\theta - \omega^2 r \cos\theta - \ddot\beta l \sin\beta - \dot\beta^2 l \cos\beta$

$a_{y_B} = \dot V_{y_B} = \dot\omega r \cos\theta - \omega^2 r \sin\theta - \ddot\beta l \cos\beta + \dot\beta^2 l \sin\beta \to \boxed{\ddot\beta = \frac{\omega^2 r \sin\theta - \dot\beta l^2 \sin\beta}{l \cos\beta}}$

sostituiamo e troviamo la a_{x_B}

Moti relativi

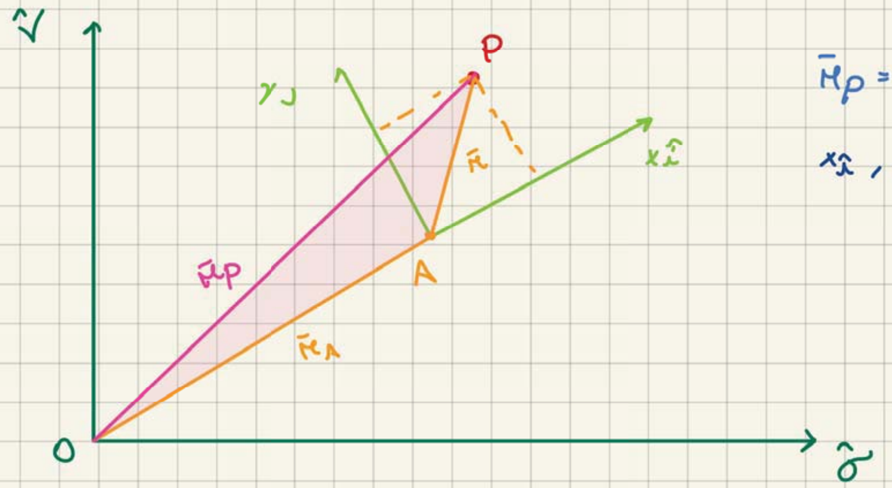
2 piani → 1 fisso e 1 mobile

Possiamo calcolare acc e velocità nel caso in cui un punto nel piano mobile sia in movimento

Composizione di velocità → TRASCINAMENTO + RELATIVE → CORIOLIS

TRASCINAMENTO: se il punto fosse fisso

RELATIVE: del punto relativa al piano



$$\bar{r}_P = \bar{r}_A + \bar{r} = \bar{r}_A + (x\hat{i} + y\hat{j})$$

$x\hat{i}$, $y\hat{j}$ piano mobile

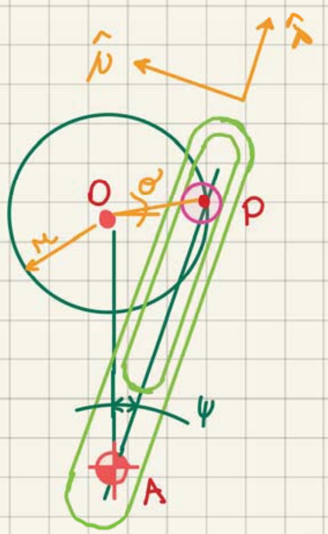
$$\dot{r}_P = \bar{V}_P = \dot{\bar{r}}_A + \underbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})}_{\text{relativa}} + \underbrace{\bar{\omega}\wedge(x\hat{i} + y\hat{j})}_{\text{trascinamento}}$$

$$\bar{a}_P = \ddot{r}_P = \dot{\bar{V}}_P = \ddot{\bar{r}}_A + (\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}) + \bar{\omega}\wedge(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) + \dot{\bar{\omega}}\wedge(x\hat{i} + y\hat{j}) + \bar{\omega}\wedge(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) + \bar{\omega}\wedge\bar{\omega}\wedge(x\hat{i} + y\hat{j})$$

$$\boxed{\bar{a}_P = \underbrace{\ddot{\bar{r}}_A}_{\text{acc origine}} + \underbrace{(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j})}_{\text{acc. relativa}} + \underbrace{2\bar{\omega}\wedge(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})}_{\text{acc. di Coriolis}} + \underbrace{\dot{\bar{\omega}}\wedge(x\hat{i} + y\hat{j})}_{\text{acc. tangenziale di trascinamento}} - \underbrace{\omega^2(x\hat{i} - y\hat{j})}_{\text{acc. centripeta}}}$$

$$\bar{a}_P = \ddot{\bar{r}}_A + \bar{a}_{relativa} + \bar{a}_{coriolis} + \bar{a}_{trascinamento}$$

es. $\boxed{\text{GUFO}}$ → moti relativi



1 Gdl

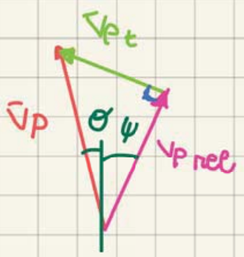
$OP = r = \text{cost}$

$AO = \text{cost}$

$AP = \ell$ variabile

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{P/A\,rel} + \bar{V}_{P/A\,trasc} = \bar{\omega} \wedge \overline{OP} = \dot{\ell}\hat{\lambda} + \dot{\psi} \wedge \overline{AP}$$

$\bar{\omega} \wedge \overline{OP}$	$\dot{\ell}\hat{\lambda}$	$\dot{\psi} \wedge \overline{AP}$
$\omega \cdot r$	$\dot{\ell}$	$\dot{\psi}\ell$
$\perp OP$	$//\ AP$	$\perp AP$
$\hat{j}$	$\pm\hat{\lambda}$	$\pm\hat{\mu}$



$$V_{P_t} = V_P \cdot \sin(\theta + \psi)$$

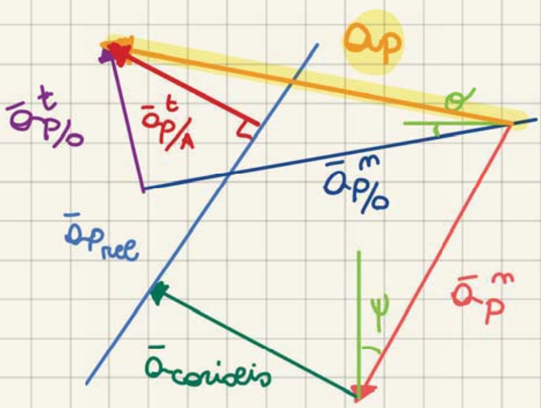
$$V_{P_{rel}} = \dot{\ell} = V_P \cos(\theta + \psi)$$

$\omega \neq 0 \rightarrow \dot{\omega} \neq 0$

TRASCINAMENTO

$$\bar{a}_P = \bar{a}^n_{O/P} + \bar{a}^t_{O/P} = \cancel{\bar{a}_A}^{\,0} + \bar{a}^n_{P/A} + \bar{a}^t_{P/A} + \bar{a}_{P\,rel} + \bar{a}_{P\,coriolis}$$

$\bar{a}^n_{O/P}$	$\bar{a}^t_{O/P}$	$\bar{a}_A$	$\bar{a}^n_{P/A}$	$\bar{a}^t_{P/A}$	$\bar{a}_{P\,rel}$	$\bar{a}_{P\,coriolis}$
$\omega^2 r$	$\dot{\omega} r$	0	$\dot{\psi}^2\ell$	$\ddot{\psi}\ell$	$\ddot{\ell}$	$2\dot{\psi}\dot{\ell}$
$//\ OP$	$\perp OP$		$//\ AP$	$\perp AP$	$//\ AP$	$\perp AP$
$-\hat{\imath}$	$\hat{j}$		$-\hat{\lambda}$	$\pm\hat{\mu}$	$\pm\hat{\lambda}$	$+\hat{\mu}$



Statica · Dinamica

Studio del comportamento di un sistema soggetto ad un sistema di forze esterne e momenti

STATICA

Sottoinsieme della dinamica dove le forze dinamiche sono pari a zero, non compaiono

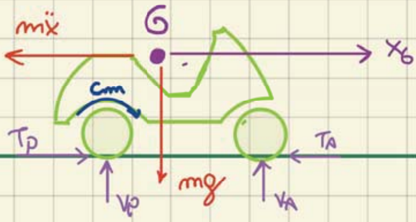
1. Leggi di equilibrio Newton → Eq. cardinali dinamica di Alembert
2. Metodo energetico → no eq. istantaneo ma eq. energetico tra 2 condizioni
3. Eq. di conservazione → Conservazione delle quantità di moto; " del momento della quant. di moto

ROTORI — URTI

Modello del sistema meccanico

NOI

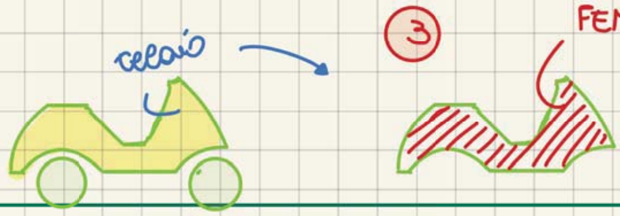
(0) $x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



(1) 1 Gdl (x)
accopp. cinematico - rotolamento puro
(x, θ_P, θ_A)

(2) $x, y, \theta_G, \theta_P, \theta_A$
si complica di più

troppo complicato



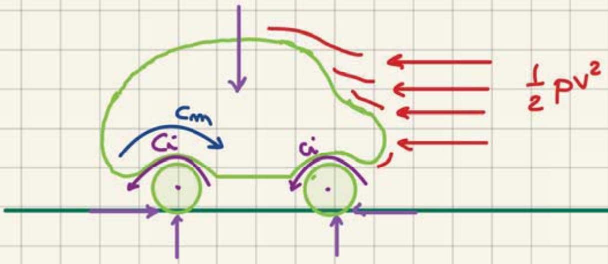
(3) FEM elementi finiti
↓
spezzettamento in milioni di elementi e gdl

1. Modello del sistema meccanico
2. Diagramma del corpo libero
3. Equazioni di equilibrio → soluzione

2. DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO

forze peso, forze esterne, forze d'Inerzia, Reazioni vincolari, Momenti

$$\left.\begin{aligned}\sum \bar{F}_e + \bar{F}_i &= 0 \\ \sum \bar{M}_e + \bar{M}_i &= 0\end{aligned}\right\} \text{equilibrio sistema}$$



forze esterne aerodinamiche

Forze e momenti

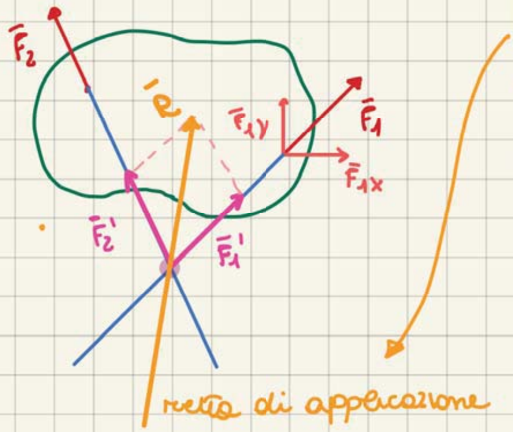
FORZE → vettori →
- modulo [N]
- direzione
- verso
- retta applicazione → x CORPI RIGIDO

  \+
- Punto di applicazione → x CORPI FLESSIBILE

esempio

Quando la retta di applicazione è sufficiente senza il punto si dice che la forza è VETTORE SCORREVOLE

Diagramma di forze



$$\boxed{\bar R = \bar F_1 + \bar F_2}$$

$$\bar F_1 = \bar F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}$$

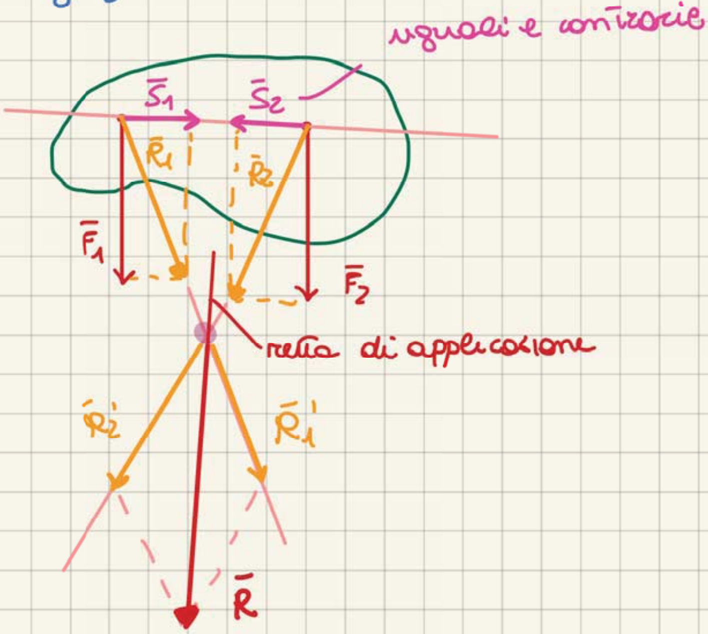
$$\bar F_2 = \bar F_{2x}\hat{i} + \bar F_{2y}\hat{j}$$

$$\bar R = \bar R_x\hat{i} + \bar R_y\hat{j} = (F_{1x} + F_{2x})\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y})\hat{j}$$

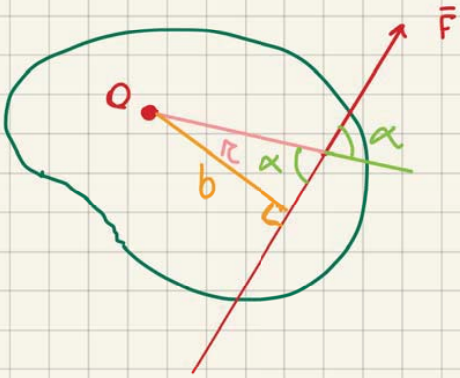
così non conosco la retta di appl.

Composizione di due forze parallele

metodo grafico



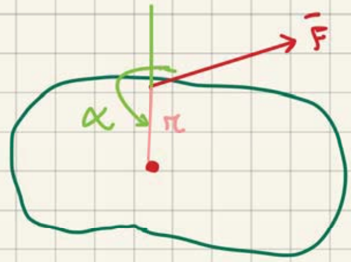
MOMENTI



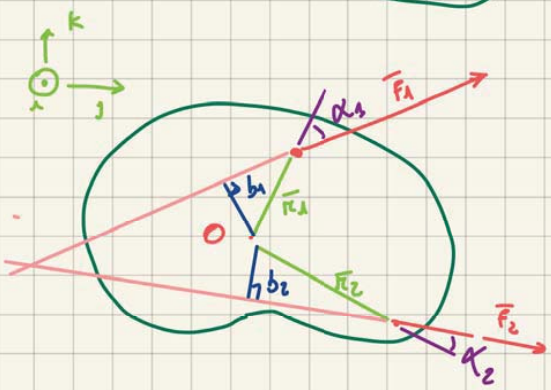
$\bar M_O = \bar r \wedge \bar F = r \cdot F \cdot \sin\alpha$ ⊙

$\bar M_O = bF$ ⊙

$r\sin\alpha = b$



$\bar M'_O = r \cdot F \cdot \sin\alpha$ ⊗

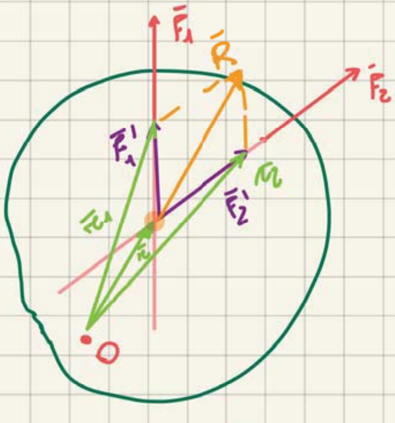


$\bar M_O = \overbrace{\bar r_1 \wedge \bar F_1}^{\bar M_1} + \overbrace{\bar r_2 \wedge \bar F_2}^{\bar M_2} =$

$= r_1 F_1 \sin\alpha_1 (-\hat k) + r_2 F_2 \sin\alpha_2 (\hat k)$

$= b_1 F_1 (-\hat k) + b_2 F_2 (\hat k)$

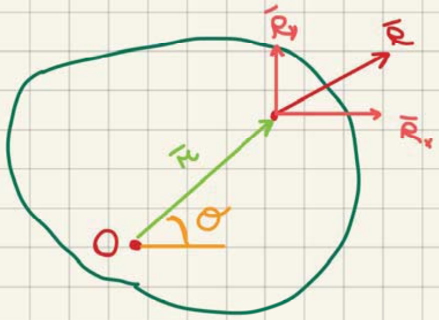
$= b_2 F_2 - b_1 F_1 \; (\hat k)$



th di Varignon

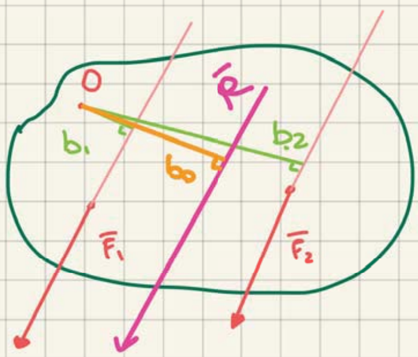
vettori che scorrono

$\bar M_O = \bar M_1 + \bar M_2 = \bar r \wedge \bar R = \bar r_1 \wedge \bar F_1 + \bar r_2 \bar F_2$



$$\bar M_O = \bar r \wedge \bar R = \det \begin{vmatrix} \hat i & r\cos\theta & R_x \\ \hat j & r\sin\theta & R_y \\ \hat k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar M_O = \hat i\,(0) - \hat j\,(0) + \hat k\,(\underset{\odot}{R_y \cdot r\cos\theta} - \underset{\otimes}{R_x r\sin\theta})$$

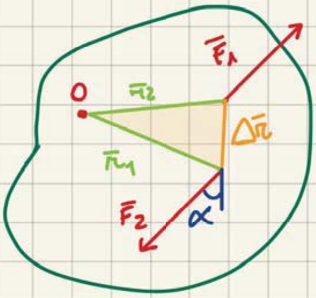


$$\overline{M}_O = -b_1F_1 - b_2F_2 = -R b_0$$

$$b_0 = \frac{b_1F_1 + b_2F_2}{R} = \frac{b_1F_1 + b_2F_2}{F_1 + F_2}$$

$\sum_i \overline{F}_i \neq 0$ sempre

Se invece $\sum_i \overline{F}_i = 0$, la risultante è nulla $\rightarrow \overline{R} = 0$



$|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$ ma $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$

$$\overline{M}_O = \overline{r}_2 \wedge \overline{F}_2 + \overline{r}_1 \wedge \overline{F}_1$$

$$= \cancel{\overline{r}_2 \wedge -\overline{F}_1} + \cancel{\overline{r}_2 \wedge \overline{F}_1} + \Delta\overline{r} \wedge \overline{F}_1$$

$$= \Delta\overline{r} \wedge \overline{F}_1$$

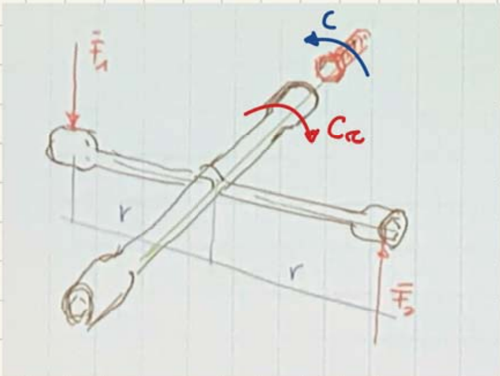
non dipende dal punto O

$$= \Delta r \sin\alpha \, F_1 \quad \otimes$$

$$= b \cdot F_1 \quad \otimes$$

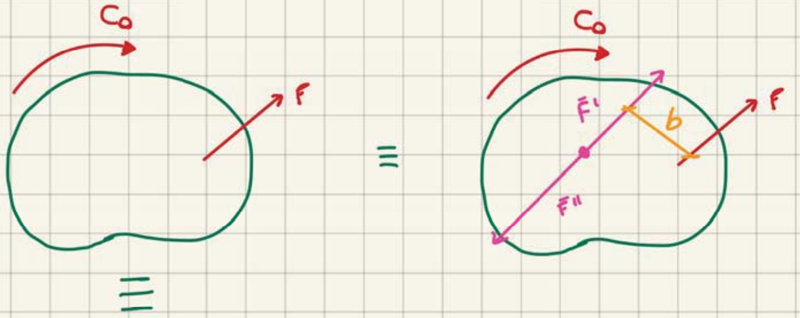
Coppia di forze C

esempio



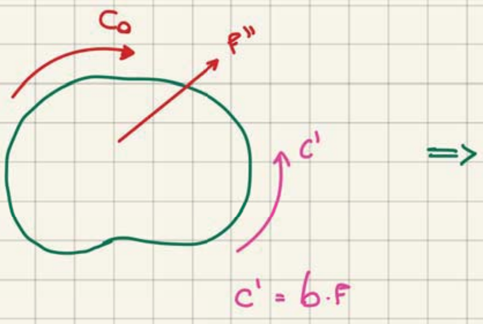
$C = 2rF$ con $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$

Equivalenza tra forze e coppie

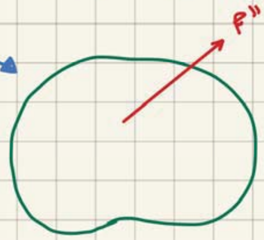


$|\bar{F}| = |\bar{F}'| = |\bar{F}''|$

Se trasferiamo le forze ad una distanza b tale che $b \cdot F = C_0$ cioè $|C_0| = |C'|$



$\Longrightarrow$



Tipologie di Forze

Classificazione:

1. Forze concentrate o distribuite
2. Forze interne e Forze esterne rispetto al sistema
3. Forze di massa o di contatto

1 Concentrate o distribuite

$|\bar{N}'| = |\bar{N}| \qquad \bar{N}' = -\bar{N}$

ruota

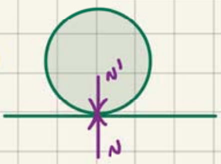
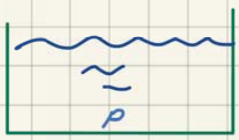


diagramma di pressioni $N = \int_A p \, dA$

trefolo

$T = \int_A \sigma \, dA$ concentrate

liquido

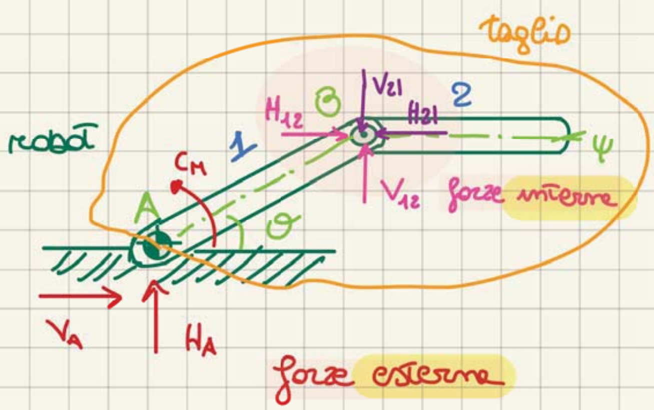


distribuite → pressioni

es. freni, frizioni, ecc...

② Forze interne e forze esterne

legato a diagramma di corpo libero → sistema isolato da esterno



C_M = coppia motrice applicata dal motore al braccio 1

se non c'è il motore $C_A = 0$