



## **Centro Stampa**

**ATTENZIONE QUESTI APPUNTI SONO OPERA DI STUDENTI , NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE. IL NOME DEL PROFESSORE SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**N° 4257**

**IDRAULICA FLUVIALE**

**TEORIA ESERCIZI**

**2020-21**

**DI FERRANTE MICOL CHIARA**

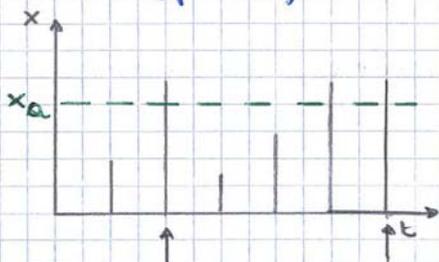
Giordani 01.10

TEMPO DI RITORNO

$x$  = variabile casuale stocastica, es. prezzo del colmo di piena

$p(x)$  = F. re di probab. lina' di non superamento, e fa probab. lina' che non si superi il valore  $x$

Dato una serie di osservazioni casuali, indipendenti tra loro come gli eventi di piena, perche' ben distinguibili temporalmente (a differenza delle piogge giornaliere che sono tra loro dipendenti).



Consideriamo le osservazioni tra quelle che superano il valore assegnato  $x_a$ . Tali le osservazioni (1) che sono superiori al valore  $x_a$  sono separate da  $m-1$  osservazioni, comprese che superano e fanno volta la soglia  $x_a$ .

Nel caso in esame  $m=2$ , quindi  $m-1=1$

Anche  $m$  e' una variabile casuale

La probab. lina' di non osservare superamento e' def. come probab. lina' di non superamento elevato a  $m-1$  osservazioni.

$$p(x_a)^{m-1}$$

La probab. lina' di un'osservazione superamento nelle prime  $m-1$  osservazioni e di osservarlo nella  $m$ -esima osservazione e' invece pari alla probab. lina' di non superamento elevato a  $m-1$  per la probab. lina' di superamento:

$$p(m) = p(x_a)^{m-1} \cdot [1 - p(x_a)] \tag{1}$$

dove  $1 - p(x_a)$  e' la prob. di superamento

La media delle  $m$  osservazioni e' la sommatoria su tutti gli  $m$  possibili per la sua probab. lina':

$$\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m p(m) \tag{2}$$

Sostituiamo la (1) nella (2):

$$\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m p(x_a)^{m-1} [1 - p(x_a)]$$

perche':

$$\sum_{m=1}^{\infty} m z^{m-1} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=0}^{\infty} z^m - \sum_{m=1}^{\infty} z^m \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{1-z} - 1 \right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

allora:

$$\mu(m) = \frac{1}{1 - p(x_a)^2} [1 - p(x_a)]$$

$$\mu(m) = \frac{1}{1 - p(x_a)}$$

→ n° di osservazioni medio tra un superamento della soglia e quello successivo

Dividendo per  $P_0$  di osservazioni eseguite nell'arco di tempo (es. porzione di piano a cadenza mensile), si ottiene il tempo di zero, il tempo di superamento della porzione assegnata:

$$T_r(Q) = \frac{1}{1-p(Q)} \quad (3)$$

con  $1-p(Q)$  = prob. di superamento della porzione  $Q$

Ci sono diversi modelli probabilistici che forniscono la probabilità di superamento, uno di questi è:

DISTRIBUZIONE di GUMBEL - EVI

dove la probabilità di superamento è pari a:

$$P(q_c) = e^{-e^{-y}}$$

$$\text{con } y = \alpha(q_c - \mu)$$

$$\bullet \alpha = \frac{1,283}{\sigma}$$

$\sigma$  = scarto quadratico medio

$$\bullet \mu = \mu - \frac{0,577}{\alpha}$$

$\mu$  = media

$q_c$  = variabile casuale

Sostituendo (3) esplicita il legame tra il tempo di zero  $T_r$  e la porzione  $q_c$ :

$$q_c = \mu - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ -\ln \left( \frac{T_r - 1}{T_r} \right) \right]$$

perché:

$$\ln \left( \frac{T_r - 1}{T_r} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{T_r} \right) \quad \text{per } T_r \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T_r} \rightarrow 0 \quad \text{si usa lo sviluppo di McLaurin}$$

e quindi:

$$\ln \left( \frac{T_r - 1}{T_r} \right) \approx -\frac{1}{T_r}$$

allora:

$$q_c = \mu - \frac{1}{\alpha} \ln \left( -\frac{1}{T_r} \right)$$

$$q_c = \mu + \frac{1}{\alpha} \ln(T_r)$$

Spesso la distribuzione di Gumbel viene usata per serie di porzione non di piano.

Da  $\mu$  e  $\sigma$  delle porzione usano  $\mu$  e  $\alpha$  e con  $\mu$  e  $\alpha$ , posso usare la formula

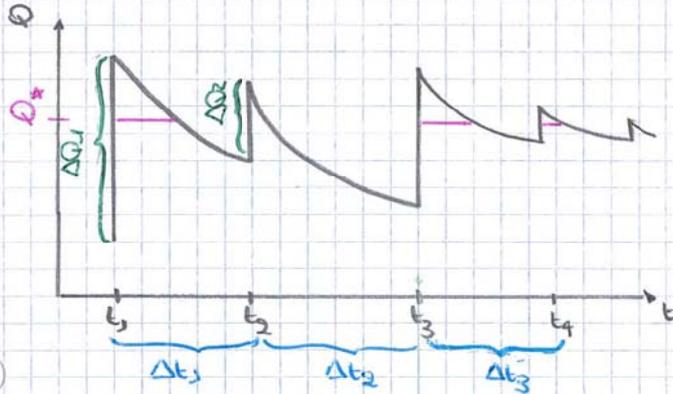
$$q_c = \mu + \frac{1}{\alpha} \ln(T_r)$$

Se considero una serie di porzione medie giornaliere non posso più dire che sono tra loro indipendenti (la porzione del giorno  $x$  dipende dalla porzione del giorno  $x-1$ ) quindi.

hanno tra loro una correlazione temporale, non essendo stocastici come nel periodo decedente dell'apparato appena usato e libero che non si faccia riferimento ad un tempo di arrivo  $t_i$  sufficientemente grande (superiore all'anno).

Se si volesse investigare il fenomeno a delle scale temporali più brevi, rispetto a quelle annuali, ad es. riferendosi a scale giornaliere, è necessario tenere conto della correlazione temporale tra gli eventi.

Gli eventi di piena hanno una fase crescente (r), non istantanea, ma più veloce della fase di decrescita (impulso di portata seguito da decrescita esponenziale)



Tale serie può quindi essere modellizzata da una equazione differenziale stocastica:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ + F(t)$$

il decadimento esponenziale è dato da  $kQ$

L'eq. differenziale lineare

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

prevede un'unica soluzione (esponenziale decrescente)

Il termine  $F(t)$  definisce invece la stocasticità dell'eq. e detto termine forzante composto, sono degli impulsi decrescenti all'∞.  $F(t)$  è descrivibile come la somma totale di una serie di impulsi  $\Delta Q_i$  che avvengono in istanti precisi di tempo:

$$F(t) = \sum_{i=1}^N \Delta Q_i \delta(t - t_i)$$

con  $\delta$  = delta di Dirac

$$\delta(t - t_i) \neq 0 \text{ per } t = t_i$$

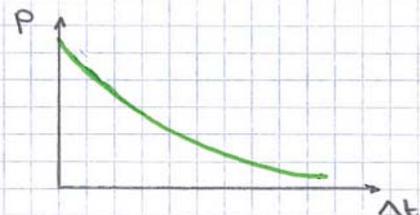
$t_i$  è l'istante di tempo a cui avviene l'impulso di portata, per tanto  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

$F(t)$  è detto termine forzante composto perché è fatto di  $\Delta Q_i$  e  $\Delta t_i$ . I dati  $\Delta Q_i$  e  $\Delta t_i$  prendo in modo casuale, ma sono correlati da una distribuzione di probabilità, ovvero:

$$p(\Delta t) = \lambda e^{-\lambda \Delta t}$$

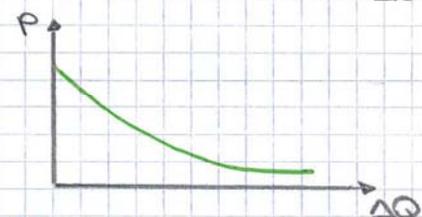
probabilità di estrazione degli intervalli  $\Delta t$

è molto probabile estrarre intervalli piccoli, mentre è poco probabile estrarre lunghi intervalli  $\Delta t$ .



media degli intervalli temporali:

$$\langle \Delta t \rangle = \int_0^{\infty} \Delta t p(\Delta t) = \int_0^{\infty} \Delta t \cdot \lambda e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{\lambda}$$



Lo stesso avviene per la portata:

$$p(\Delta Q) = \gamma e^{-\gamma \Delta Q} \quad \text{e} \quad \langle \Delta Q \rangle = \frac{1}{\gamma}$$

L'eqz. differenziale stocastica:  $\frac{dQ}{dt} = -kQ + \gamma(t)$  non ha una soluzione determinata

Perché  $\Delta Q$  e  $\Delta t$  sono estranei a sorte non esiste una serie delle potenze che è soluzione di tale eqz., a seconda di come si esegue l'estrazione, ovvero serie diverse. Possiamo quindi, al massimo, affermare che probab. lity distribution function - PDF delle potenze dato che  $Q$  è una variabile random.

Nota: la eqz. differenziale stocastica, la soluzione della distribuzione delle potenze fa sì ricorra dalla MASTER EQUATION:

$$\frac{\partial p(Q,t)}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial Q} [Q p(Q,t)] - \lambda p(Q,t) + \int_0^Q \lambda e^{\gamma(Q-y)} \cdot p(y,t) dy$$

quindi:  $p(Q)$  è soluzione di tale MASTER EQUATION

per  $t \rightarrow \infty$ , la master equation ha una soluzione stazionaria:

$$p(Q) = \frac{\gamma^{\lambda/k}}{\Gamma(\lambda/k)} e^{-\gamma Q} Q^{(\lambda/k-1)}$$



DISTRIBUZIONE DELLE PROBABILITÀ' delle PORTATE, soluzione della master equation dove

$\Gamma = \gamma$  ne speciale calcolata in  $\frac{\lambda}{k}$  tabellare

La media e la varianza di tale distribuzione delle probabilità di potenze sono:

$$\mu(Q) = \int_0^{\infty} Q p(Q) dQ = \frac{\lambda}{\gamma k} \quad (1)$$

$$\sigma^2(Q) = \frac{\lambda}{\gamma^2 k} \quad (2)$$

$\gamma, \lambda, k$  caratterizzano il processo stocastico e definiscono un vocamento fa te<sub>ue</sub>.

Ho 3 parametri ( $\gamma, \lambda, k$ ), ma ho 2 grandezze ( $\mu, \sigma^2$ ), e quindi: necessario introdurre una terza grandezza, la F.N.E. DI AUTOCORRELAZIONE

$$\rho_Q(t) = \frac{\langle Q(t) \cdot Q(t-t) \rangle}{\sigma^2(Q)} \quad \text{F.N.E. DI AUTOCORRELAZIONE}$$

che definisce quanto sono correlati temporalmente 2 punti presi a caso della serie.

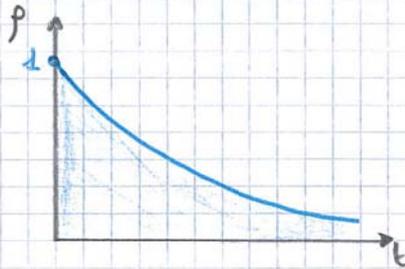
$\langle \rangle$  = media temporale

Fissato  $t$ , prendo un valore di  $Q$  al tempo  $t_0$   $Q(t_0)$  e lo moltiplico per  $Q(t_0-t)$  e faccio lo stesso prendendo una  $Q$  di un altro tempo  $t_0$ .

$$\langle Q(t) \cdot Q(t-t) \rangle = \frac{1}{n} [Q(t_1) \cdot Q(t_1-t) + Q(t_2) \cdot Q(t_2-t) + \dots + Q(t_n) \cdot Q(t_n-t)]$$

Tale  $\langle \rangle$  dice quanto un valore di processo è correlato con se stesso ad un tempo precedente.

Per  $t=0$ :  $Q(t)Q(t-t) = [Q(t)]^2 = \sigma^2(Q)$



Daggruppando la f.ne di autocorrelazione in f.ne del tempo, si definisce la SCALA INTEGRALE che è pari all'area sotto la curva.

$$T_Q = \int_0^{\infty} p_Q(t) dt$$

Se  $T_Q$  è finita, allora il processo è ergodico e quindi:

$$\langle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt \quad \text{media d'insieme e media temporale canonica}$$

La SCALA INTEGRALE definisce la memoria del sistema: tanto più è alta, tanto più il segnale è correlato temporalmente con se stesso, tanto più il sistema ha memoria.

Ad es. una piovra che cambia di piano in piano in modo molto veloce è caratterizzata da una serie di picchi avente scala integrale bassa (poco correlata temporalmente), caso tipico dei rumori e dei fiumi montani. Più i fiumi sono grandi, con bacino esteso più hanno scala integrale  $T_Q$  grande, anche di diverse decine di giorni, se non mesi.

Tutte le volte che si ha un impulso si ha una curva dell'autocorrelazione che tende a decrescere esponenziale invece delle picche e correlate temporalmente per definizione.

Si dimostra che:

$$T_Q = \frac{1}{K} \tag{3}$$

Abbiamo quindi 3 grandezze fisiche:

- media  $\mu$
- varianza  $\sigma^2$
- scala integrale  $T$

legare ai 3 parametri  $\mu, \lambda, K$ .

Inserendo quindi le relazioni (1), (2), (3), si ricava:

$$\lambda = \frac{\mu^2}{\sigma^2 T}$$

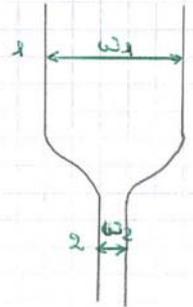
$$\gamma = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$K = \frac{1}{T}$$

Ad es. consi. decimo un fenomeno legato alle porzioni su scala spaziale. Se non abbiamo nessuna misura delle porzioni reali,  $Q$ , dobbiamo creare una serie (di porzioni) sintetica usando  $\gamma, \mu, \sigma^2$  e calcolare quindi  $\lambda, \lambda, K$  che permettono di scrivere il modello matematico. Non il modello posso risolvere numericamente l'eqz. differenziale stocastica  $\frac{dQ}{dt} = -KQ + F(t)$  mediante integrazione. Con delle estrazioni casuali  $\frac{dQ}{dt} = -KQ + F(t)$  genero una serie di porzioni sintetiche pari a quelle estratte grazie a  $\mu, \sigma^2$  e  $\gamma$ .

ANALISI di UN RESTRINGIMENTO

Analizziamo un restringimento di un corso d'acqua. Tipicamente l'acqua è separata dalle forti pendenze viene convogliata verso dei canali di scolo che hanno una larghezza minore, si passa da una larghezza  $w_1$  ad una  $w_2$ .



Il **Bilancio di PORTATA LIQUIDA** impone che la portata che transita attraverso la sezione 1 deve essere la medesima che transita attraverso la sezione 2:

$$Q_1 = Q_2$$

$$w_1 q_1 = w_2 q_2$$

$q_i$  = portata per unità di larghezza

$$q_2 = \frac{w_1}{w_2} q_1 \rightarrow \text{conservazione delle PORTATE LIQUIDE}$$

Se vogliamo considerare le **PORTATE SOLIDE**, sappiamo che la portata unitaria solida  $q_s$  la possiamo scrivere come una legge di potenza della portata unitaria liquida:

$$q_s = a q^b \rightarrow \text{legge del trasporto solido}$$

quindi la portata solida che transita nella sezione 1 è quella che transita nella sezione 2 e pari a:

$$Q_{s1} = q_{s1} \cdot w_1 \quad \text{e} \quad Q_{s2} = q_{s2} \cdot w_2$$

sostituendo:

$$Q_{s1} = q_{s1} \cdot w_1 = a q_1^b \cdot w_1 = a q_1^b \left( \frac{w_1}{w_2} \right) w_2$$

$$Q_{s2} = q_{s2} \cdot w_2 = a q_2^b \cdot w_2 = a \left[ q_1 \left( \frac{w_1}{w_2} \right) \right]^b w_2 = a q_1^b \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^b w_2$$

quindi confrontando le ultime 2 relazioni:

$$Q_{s1} = a q_1^b \left( \frac{w_1}{w_2} \right) w_2$$

$$Q_{s2} = a q_1^b \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^b w_2$$

si nota che entrambi sono proporzionali a " $a q_1^b w_2$ " solo che la portata solida transittoria nella sezione 1 è proporzionale a  $\frac{w_1}{w_2}$ , mentre la portata solida transittoria nella sezione 2 è proporzionale a  $\left( \frac{w_1}{w_2} \right)^b$  medesimo rapporto elevato però a  $b$ .

Perché tendenzialmente:  $b > 1$

la portata solida che transita nella sezione 2 è maggiore della portata solida che transita nella sezione 1:

$$Q_{s2} > Q_{s1}$$



È vero che la continuità della portata liquida impone che la portata liquida aumenti muovendosi tra le 2 sezioni, ma la portata solida invece cambia: nella sezione più stretta passa maggiore portata solida perché tale apporto di sedimenti viene prelevato dalle "caviglie" dal fondo del fiume.

▲ Nella sezione 2 può transitare più portata solida a parità che il tasso di erosione sia per poter conservare la massa.

▲ Coni. John che c'è un restringimento, il canale più stretto è anche più inciso. Ecco perché da una zona di caduta delle acque ad alta pendenza, ma poco profonda si mescola un fiume con profondità molto più rilevante.

Tali canali di scab che portano ad alta quota tra le montagne sono tutti in erosione.

Al livello pianeggiante i fiumi convogliano verso valle una quantità di materiale solido pari a  $13 \cdot 10^9$  tonnellate l'anno, e il 50% di tale cifra arriva dal Sud-Est asiatico.

Considerando che la somma di tutte le portate fluviali del mondo è circa  $1,2 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ , allora il rapporto tra la portata solida e quella liquida:

$$\frac{Q_s}{Q_l} = \frac{13 \cdot 10^9 \text{ tonnellate}}{1,2 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{s}} = 360 \text{ mg/l}$$

si ottiene una concentrazione media delle particelle (di materiale solido) convogliato dal fiume pari a 360 mg/l (sono parti per milione).

Tale media viene così del:

- materiale effettivamente sospeso, solido sospeso convogliato dal fiume nella fase liquida
- materiale convogliato come trasporto solido di fondo trasportato per attrito, messo sul fondo

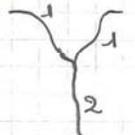
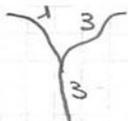
### BACINO IDROGRAFICO

Il BACINO di DRENAGGIO è l'area che contribuisce a fornire acqua e sedimenti al sistema fluviale ed è circoscritto dalla linea di massima altitudine, detto spartiacque idrografico.

La geometria di un sistema fluviale si configura in modo tale da assicurare il bilancio di portata solida e di portata liquida. La portata solida aumenta, però ogni volta che c'è un restringimento quindi si parla di sistemi lontani dallo equilibrio.

Quando si parla di bacino idrografico si deve considerare un ordinamento dei canali:

- l'ordinamento più consueto ed usato è quello di Horton e Strahler il quale prevede che ogni tratto di fiume viene numerato partendo da monte che quindi hanno ordine 1. Se 2 tratti con medesimo ordine si incontrano (confluiscono) allora il tratto che ne deriva ha un ordine superiore. Se invece confluiscono 2 tratti di fiume con ordine diverso, il tratto successivo ha lo stesso ordine del fiume di monte con ordine superiore.



Quindi con il metodo di Horton-Strahler:

$$n+n = n+1$$

$$(3+3=4)$$

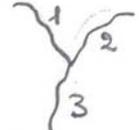
$$n+(n-1) = n$$

$$(2+1=2, 3+2=3)$$

In questo modo si identifica facilmente l'asta principale, ma c'è il problema che quando 2 fiumi si incontrano, se non sono del medesimo ordine, il fiume che ne deriva non aumenta di ordine per questo aumento di portata. Questo vuol dire che la portata non cresce con l'ordine di Strahler.

- schema di Shreve modifica lo schema di Horton-Strahler: quando due fiumi di ordine diverso si incontrano, il risultato è un fiume di ordine pari alla somma dei 2 ord.:

$$a+b = (a+b)$$

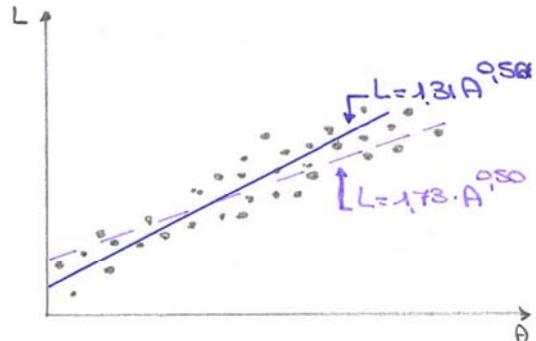


Sulla struttura dei fiumi, dal punto di vista di come crescono le lunghezze in funzione dell'ordine di Strahler o di Shreve, come crescono le aree drenate sono state fatte tante considerazioni. Una di queste porta ad un diagramma avente come assi:

- L = lunghezza dell'asta principale (km)
- A = area drenata del bacino (km<sup>2</sup>)

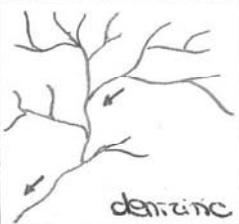
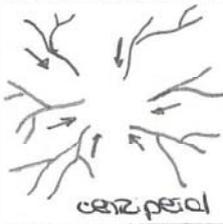
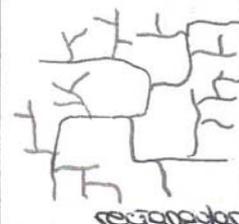
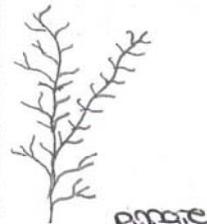
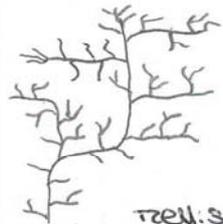
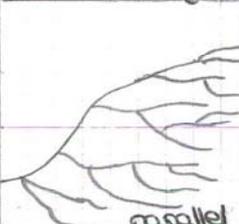
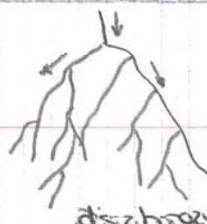
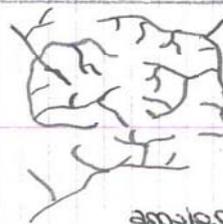
Si nota che aumentando L in funzione di A, dai si dispongono abbastanza bene su un diagramma in scala logaritmica e si vede, stanno quindi, una legge di potenza del tipo:

$$L = 1,31 A^{0,568}$$



C'è una legge di dipendenza attorno alla legge di Horton, però in prima approssimazione si danno una descrizione di quanto può essere l'ipotesi l'asta principale in funzione dell'area drenata del bacino.

ESEMPI DI STRUTTURA GEOMETRICA DEI BACINI IDROGRAFICI

 dendritic	 radial	 centripetal
 rectangular	 pinnate	 trellis
 parallel	 dissected	 anastomosing

La forma dendritica è quella più ricorrente.

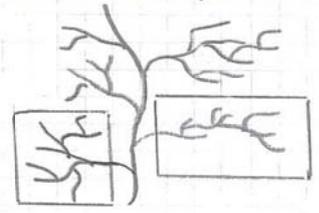
La forma radiale la si ha in casi di altimetria da o verso un lago.

La forma rettilineare invece è abbastanza rara.

Le forme pinnate sono tipiche dei delta fluviali, come anche la forma disarticolata.

FRATALI

Spesso i terreni idrografici hanno una struttura con caratteristiche frattali, cioè se prendo delle porzioni (di tratti di bacino e l. confluente senza una scala non vedo grosse differenze e come se vedessi un'auto-similindine geometrica nella generazione delle ramificazioni. Ciò è tipico delle strutture frattali a tal punto che si sono identificati degli indicatori di tale frattalità dette DIMENSIONI FRATALI.



(Libro per lo studio dei frattali di Gleuck, sul caos o di Mandelbrot).

Il FRATALE è una struttura geometrica che presenta una forte auto-similindine geometrica e strutturale (che si ripete a scale via via più piccole, la struttura è auto-simile a se stessa ma non che zoommo).

Per caratterizzare queste sue auto-similindine sono state definite le dimensioni frattali. Il termine frattale ha spesso riferimento al fatto che l'oggetto non ha una dimensione finita, non è una linea che ha dimensione 1 o una superficie che ha dimensione 2, ma è un oggetto che ha dimensione frazionaria (da qui frattale).

Ci sono vari metod. per calcolare tale dimensione frattale, il più semplice è il metodo Box-counting - DIMENSIONI (CAPACITÀ) - è una particolare misura della dimensione frattale.

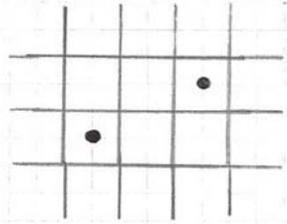
Per calcolare la CAPACITÀ di un frattale si assume un oggetto che vive e può essere rappresentato in un piano cartesiano n-dimensionale. Tale piano cartesiano a n-dimensioni può essere riempito con una griglia (suddiviso in quadrati se il piano è bi-dimensionale, in cubi se è 3D) di lato E. Possiamo far diminuire il lato della griglia rendendola sempre più fitta e al variare dell'infinitesimo contare il ricoprimto dell'oggetto sulla griglia, cioè contare i cubi o i quadrati che lo occupano dall'oggetto. Tanto più renderò fitta la griglia e tanto più i cubi o i quadrati si raddoppiano di dimensione e quindi il numero dei cubi/quadrati che ricoprono l'oggetto crescerà.

Per Box-counting DIMENSIONI si intende la quantità  $D_0$  definita come il limite per  $E \rightarrow 0$  (facendo tendere la griglia ad un grado di infinitesimo massimo) del rapporto del logaritmo di N che è f. ne di E al logaritmo di  $\frac{1}{E}$ :

$$D_0 = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\ln N(E)}{\ln \left(\frac{1}{E}\right)} \rightarrow \text{Box-counting DIMENSIONI}$$

dove N è il n° di cubi / quadrati necessari per ricoprire l'oggetto.

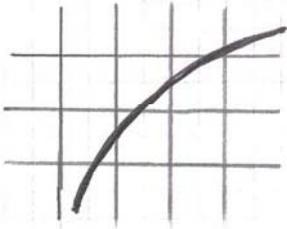
Esempi di oggetti non frattali:



Il punto è un oggetto di dimensione 0. Consideriamo 2 punti giacenti sulla griglia e P n° di box (N) che ricoprono l'oggetto (composto da 2 punti) è sempre 2 indipendentemente dalla dimensione del lato del box (E). posto infinitesimo punto sulla griglia, ma ogni punto sarà sempre contenuto in un box. Quindi:  $N(E) = 2$

$$D_0 = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln \left(\frac{1}{E}\right)} = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\infty} \rightarrow 0 \quad D_0 = 0$$

Il limite tende a zero ed è giusto perché il punto ha dimensione 0



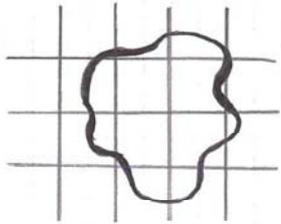
Se considero una curva (ha dimensione 1) osservo che il numero di box che ricoprono la curva cresce con il d.m. di  $\epsilon$  in maniera proporzionale.

$N(\epsilon)$  è proporzionale alla lunghezza della curva e  $\propto \frac{1}{\epsilon}$

$$N(\epsilon) = \frac{L}{\epsilon}$$

quindi:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon/\epsilon_0))}{\ln(\frac{1}{\epsilon/\epsilon_0})} = 1 \quad D_0 = 1$$



Allo stesso modo, se considero una superficie (dimensione 2) noto che  $N(\epsilon)$  cresce in modo proporzionale al d.m. di  $\epsilon$  perché è proporzionale all'area della superficie  $A \propto \frac{1}{\epsilon^2}$

$$N(\epsilon) = \frac{A}{\epsilon^2}$$

quindi:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(A/\epsilon^2)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = 2 \quad D_0 = 2$$

Consideriamo ora un caso frazionale fornito ad es. dal set di Cantor. Tale frattale lo costruiamo prendendo un segmento compreso tra 0 e 1 lo dividiamo in 3 parti uguali e buttiamo via la parte centrale ottenendo così 2 segmenti che vanno da 0 a  $\frac{1}{3}$  e da  $\frac{2}{3}$  a 1.

Ognuno di questi 2 segmenti ottenuti lo dividiamo nuovamente in 3 parti uguali e buttiamo via la parte centrale ottenendo così 4 segmenti lunghi  $\frac{1}{9}$ .

Ottenendo quindi il set di Cantor, mi aspetto che la misura alla fine del set sia nulla perché pare qualcosa simile a dei punti, ma in realtà non è così:

$$\text{il box } \epsilon_N = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

cioè la dimensione del set per  $n=1$  è  $\frac{1}{3}$ , per  $n=2$  (2 suddivisore) è  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ , ecc.

il numero necessario per il ricoprimento è:  $N(\epsilon) = 2^n$

cioè alla 1° suddivisione ( $n=1$ ) ho 2 segmenti, alla 2° ( $n=2$ ) ho  $2^2$  segmenti ecc.

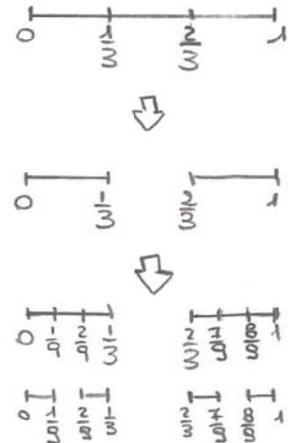
Quindi:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = 0,63$$

quindi la dimensione frazionale del set di Cantor è  $D_0 = 0,63$ . Si è dimostrato che il set di Cantor è un frattale.

Anche i fiumi sono dei frattali. Il calcolo della capacità si basa idrografici e sono effettuato da diversi ricercatori, si è dedotto che la dimensione frazionale dei bacini idrografici è pari a:

$$D_0 = 1,51 \pm 0,057$$



In generale, a livello mondiale, la capacità dei bacini idrografici è:

$$Q = 1,5 \div 2$$

TORRENTI VS Fiumi

E' bene suddividere la caratterizzazione del corso d'acqua tra tratto montano medio valle, valle, valle perché questo comporta dei forti cambiamenti sull'assetto planimetrico del corso d'acqua.

Granulometria:

- CIOTOLI > 60 mm
- GHIAIA 2 mm ÷ 60 mm
- SABBIA 60 μm ÷ 2 mm
- LIMO 2 μm ÷ 60 μm
- ARGILLA < 2 μm

La bilancia di LANE è una concettualizzazione di una serie di fenomeni, non semplici da dimostrare, ma può essere utile ogni qualvolta una coppia forte delle prime considerazioni semplici sui cambiamenti morfologici. La bilancia di Lane dice che c'è una proporzionalità (α):

$$\begin{matrix} \text{portata solida} \cdot \text{diametro sedimenti} & (\text{aspetti morfologici}) \\ \alpha \\ \text{pendenza fiume} \cdot \text{portata idrica} & (\text{aspetti idraulici}) \end{matrix}$$

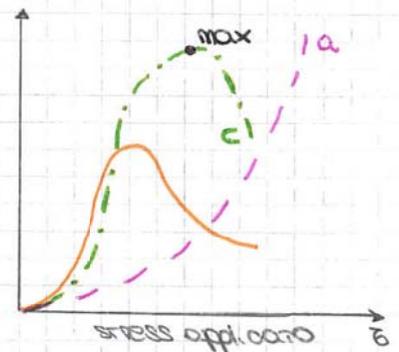
C'è proporzionalità tra gli aspetti morfologici ed idraulici; ovvero se eseguo un intervento che modifichi la portata idrica e se la pendenza non si modifica allora la portata solida moltiplicata per il diametro dei sedimenti cambia a sua volta.

Spesso si può dire che il diametro è una costante (è una caratteristica del bacino) e quindi se anche la pendenza è costante, se la portata idrica cresce, cresce di conseguenza la portata solida.

ALTRA QUESTIONE DELLA PORTATA FORMATIVA

Il problema è qual è la portata che devo considerare come rappresentativa delle condizioni formative di una certa geomorfologia fluviale.

La risposta a tale domanda non è un gioco anche perché spesso la domanda è mal posta. Inanzitutto bisogna capire cosa si intende per rappresentativa di certe condizioni fluviali, cioè ci siamo riferendo alla larghezza del fiume quindi ci si parla della domanda qual è la portata che ha formato quella larghezza oppure ci siamo riferendo alla lunghezza d'onda di un meandro e quindi alla portata che ha generato tale lunghezza d'onda o ci siamo riferendo ad altre caratteristiche planimetriche.



- a. tasso massimo
- b. frequenza d'accadimento
- c. prodotto di frequenza e tasso

Per essendo consapevoli che nel fiume le portate cambiano nel tempo, se volessi ad esse sostituire una situazione morfologica meglio equivalente, ma con  $Q = \text{cost}$ , quale portata darei scegliere?

E' ciò che Walton-Leopold suggeriscono con il grafico qui in figura

Ⓞ

Nel grafico in fig. dello stress applicato al fondo,  $\tau$  viene zippato:

- a. **Tasso di movimento**: è un rapporto della potenza solida, e fa legge di potenza  $q_s = aq^b$  ( $b > 1$ )
- b. **Frequenze di accadimento delle pozze**: le pozze in uscita ( $\tau$  lo posso vedere come delle pozze perché all'aumento delle pozze avviene lo stress del fondo) hanno una distribuzione di frequenza.

da come è fatta la curva cap. so che all'aumentare o al diminuire dello stress del fondo  $\tau$  ho delle pozze meno probabili.

Leopold suggerisce di fare il **prodotto** tra tal. 2 curve, ottenendo così la curva c. e d. ident. come il massimo ( $\bullet$  max). Tale curva presenta un massimo che massimizza il prodotto della potenza solida per la frequenza di accadimento. L'assissa di tale massimo va intesa come portata formativa.

Tale miscela ha delle falle e inton. mal: non lo prendo in considerazione.

Alcuni per PORTATA FORMATIVA considerano quella portata che ha tempo di ritorno  $T_r = 2,5$  an.

Ragionare solo in termini di portata formativa è limitante: è bene quindi, quando si fanno considerazioni progettuali, se si hanno strumenti numerici di modellazione numerica eseguire simulazioni a portata variabile intendendo il rumore (le variabili  $\tau$ ).

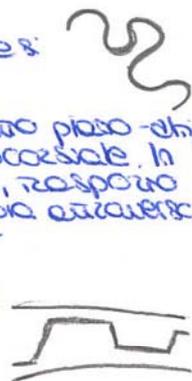
CAMBIAMENTI ECOLOGICI

Il fiume è un sistema estremamente dinamico. Dinamico vuol dire anche evoluzioni della forma del fondo dai zappes, alle dune, alle barre alternate, ai freandi.

La capacità di inondazione è tipica di tutti i fiumi, non esistono se si trova in certe condizioni tipiche dei tratti vallivi.

I fiumi possono subire dei forti restringimenti passando da un alveo piano alluvionale molto largo, a canali intrecciati fino a diventare monocanale. In tutto ciò è bene ricordare le forze interconnesse che la ecologia, trasporto solido ed idrodinamica; tutto ciò interagisce con la morfologia attraverso una serie di interazioni, mutualmente assue.

Le barre alternate sono strutture che scoloro con la larghezza del fiume e si alternano tra sponda destra e sponda sinistra. Hanno anche la caratteristica di migrare tipicamente verso valle, di muoversi anche di qualche metro al giorno in condizioni di piena.



Breve storia de fiumi europei degli ultimi 6500 anni:

- deforestazione del territorio europeo dal neolitico (4500 ac) con un'accelerazione durante l'impero romano e un picco nel XIX sec.
- XVII - XIX sec. si è osservato un aumento dei deflussi e dei tassi erosivi con ingenti depositi nei tratti vallivi. Transizioni morfologica a multi-canale. Questo è stato dovuto ad una forte deforestazione.
- 1950 - 2000: abbandono delle montagne, riforestazione bacinizzazione. C'è stato un cambio di residenza: inizio dei processi di inasce. Per bacinizzazione si intende la costruzione di bacini e laghi artificiali che ha portato assieme alla riforestazione e all'abbandono delle montagne ad un forte miglioramento del trasporto solido (da: versanti perché ci sono più foreste o dagli sbarramenti). Questo comporta meno trasporto solido a valle e quindi, poiché la capacità erosiva del fiume si mantiene comunque, non potendo trasportare solido perché non arriva da monte, il fiume lo preleva dal fondo.

Inasione del corso d'acqua sul dire che diventa più profondo e più stretto a causa della riduzione del deposito solido e questo è causato da tre fenomeni concomitanti: erosione, bacinizzazione e abbandono delle montagne.

Anche il Po ha subito un'inasione marcata negli ultimi anni: dal 1980 a causa dell'elevata bacinizzazione del bacino del Po, dell'aumento della vegetazione e l'uso di materiale solido aspirato dall'altivo per arrivare di causa.



A ridosso di un manto a monte c'è un forte interramento, il sedimento che arriva dai versanti viene interrotto dallo sbarramento e si deposita, mentre a valle dello sbarramento avviene l'erosione dell'altivo. Le conseguenze sul piano morfologico sono lo scalzamento degli argini, lo scalzamento delle pile dei ponti esponendo le fondazioni delle pile del ponte, portandolo al collasso strutturale.

Anche la Sora di Lanzo da '54 all'89 è passata dall'essere piana casuale all'essere morfocassale con tendenza alla meandrazione (quando il fiume diventa morfocassale tende a meandrazione).

Il torrente Orco è particolarmente dinamico: nel '54 aveva un assetto diagonale (nelle piene aveva zoni morte e insisteva su una zona molto estesa lateralmente), nel '75 diventa morfocassale con spiccata tendenza alla meandrazione. A causa poi delle piene del '84 e del '800 il fiume si riprende il rettilineo, sembra tornare all'assetto precedente.

Con i cambiamenti dinamici, le piene e gli eventi alluvionali saranno sempre più frequenti e intensi senza far variare sensibilmente la portata media del fiume quindi ci saranno lunghi periodi di magra separati da improvvvisi eventi di piena quasi come siccità (con l'ambio dell'assetto planiziale del fiume). Per studiare questi fenomeni sono stati proposti modelli concettuali in cui si hanno: clima, popolazione rurale e interventi di controllo sui terreni come cause principali di portata a deforestazione, effetti su piene, sedimenti, ecc.

Dopo gli anni '50 nei fiumi mondiali sono stati alterati cambiamenti a causa del boom economico, degli invasi artificiali.

I grandi invasi sono così definiti se hanno una capacità di stoccaggio superiore a  $2 \cdot 10^9 \text{ m}^3$

Con la regolamentazione delle piene a risparmio di invasi, l'indice di eterogeneità morfologica del fiume si riduce (si riducono le spec. di fauna) quindi ogni opera realizzata si corre il rischio di avere una riduzione ambientale. Un indice di sviluppo è l'analisi dell'eco-compatibilità dell'opera, d'ausilio che si realizza.

Ruolo del clima:

- durante la piccola era glaciale (1750-1900): aumento delle intensità e frequenza delle piene in coincidenza con un aumento della pastorizia e dell'agricoltura
- scenario futuro: nell'Europa centro-meridionale ci sarà un aumento delle temperature e le precipitazioni saranno più rare ed estreme (riduzione della copertura vegetale che maschererà i processi erosivi). Nella Europa settentrionale ci sarà un maggiore aumento delle temperature e delle precipitazioni liquide (quindi con riduzione delle precipitazioni solide - neve).

In situazioni di inasione del fiume la falda segue il livello del fiume quindi si abbassa, abbassando la vegetazione fa più fatica a prelevare acqua e muore (causa del problema della piena alluvionale del Po) e causato dal cambiamento idro geomorfologico del fiume.

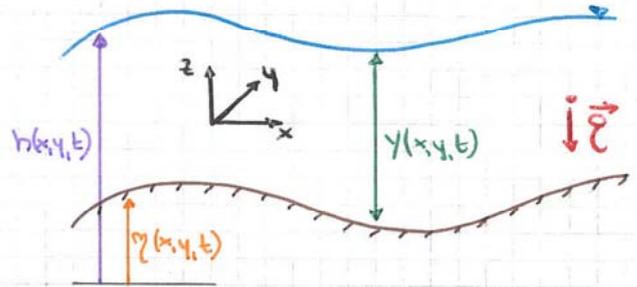
#### 4 SFIDE PER IL FUTURO

1. **METODI DI MISURA:** La geomorfica può essere usata al servizio dell'idraulica fluviale mediante acquisizione topometrica tramite laser scanner da aereo o da drone. Mediante il drone si può eseguire anche un'acquisizione spaziale. Acquisendo il DTM e anche il fondo dell'alveo (con laser green) si può procedere con
2. **MODELLAZIONE NUMERICA MORTODINAMICA:** la geomorfica assiste alla modellazione idraulica mediante software al fine di eseguire la modellazione 2D
3. **RIVER RESTORATION:** è qualificazione idraulica dei fiumi (qualificazione fluviale). Ad es. il torrente Auzano (Bolzano) è stato qualificato al fine di aumentare l'eterogeneità morfologica del fiume aprendo un corso secondario per facilitare la pluriserializzazione (quindi l'eterogeneità morfologica) e al tempo il corso secondario è diventato un vero e proprio ramo del fiume scavando un'isola interna. Anche il fiume Mareo (Bolzano) era molto disomogeneo con tante soglie che sono state intercate.
4. **CO<sub>2</sub> SEQUESTRATION:** i fiumi contribuiscono al ciclo del carbonio. I fiumi creano nuovo spazio per la carbonizzazione della vegetazione. L'erosione spondale trasferisce biomassa nel comparto idrico. L'alluvionamento nelle zone a bassa indice erosivo. Deposizione e seppellimento di grossi tralci.

EQUAZIONI DELL'IDRODINAMICA FLUVIALE

Consideriamo un fondo flessibile (non piano) ed una libera superficie libera -  
 ⇒ Impostiamo un sistema di riferimento  $(x, y, z)$

- $x$  = coo. longitudinale, allineata con il campo di moto principale (nella direzione della corrente)
- $y$  = coo. trasversale al campo di moto principale
- $z$  = coo. verticale



Rispetto ad un valore o definiamo due quote:

- quota del fondo  $\eta(x, y, t)$
- quota della superficie libera  $h(x, y, t)$

La differenza tra la quota di superficie libera e del fondo definisce il tirante  $\gamma$

$$\gamma(x, y, t) = h(x, y, t) - \eta(x, y, t)$$

In accordo con il sistema di riferimento cartesiano  $(x, y, z)$  definiamo una velocità istantanea  $\vec{u}$  ( $\vec{u}$  = istantanea) avere 3 componenti tipo  $x, y, z$ :

$$\vec{u} = \{ \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \}$$

Poiché siamo considerando flui che sono tipicamente in moto turbolento è bene distinguere una velocità istantanea da una velocità media  $U$  e da una fluttuazione  $\tilde{u}$ . Si usa quindi la decomposizione di Reynolds secondo la quale ogni componente di velocità istantanea  $\tilde{u}$  si può scrivere come una quantità media  $U$  più una fluttuazione:

$$\tilde{u} = U + u'$$

La decomposizione di Reynolds si può applicare, non solo a grandezze vettoriali, ma anche scalari, come ad esempio la pressione:

$$\tilde{p} = P + p'$$

Se come in un campo di moto turbolento si ha una variabile temporale (oltre che spaziale) delle componenti di velocità ed è quindi bene fare la media delle componenti di velocità su un lasso di tempo sufficientemente lungo  $T$  tale che la media assunti su  $T$  sia buona in un punto definito (se le cond. son. al contorno sono stazionarie). Quindi la quantità istantanea  $\tilde{u}$  è decomposta in una quantità media più la fluttuazione (che cambia istante per istante e viene come detta "parte variabile" statistica del campo di moto turbolento).

Le fluttuazioni sono definite tali che la media temporale della fluttuazione è nulla:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u} dt = 0$$

dove  $T$  è tempo sufficientemente grande (superiore alla scala integrale del segnale turbolento).

Se consideriamo quindi le equazioni di Navier-Stokes, si applica la decomposizione di Reynolds, si media nel tempo (più precisamente si media insieme ma il sistema è ergodico quindi la media di insieme fa si può sostituire con la media temporale) e si ottengono le equazioni di Reynolds.

Le **EQUAZIONI DI REYNOLDS** per fluido incomprimibile sono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D\vec{U}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{U} + \nabla(\vec{g} \cdot \vec{x}) - \nabla \cdot \mathbf{T} \\ (2) \quad \nabla \cdot \vec{U} &= 0 \end{aligned} \right.$$

equazione di continuità

date:

- derivata totale  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla}_{\substack{\text{termine convettivo, prodotto scalare tra velocità media e} \\ \text{il gradiente}}}$
- gradiente (scalare)  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$  nota  $\nabla$  è la derivata parziale delle 3 comp. spaziali
- divergenza (vettore)  $\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  è il prodotto scalare tra  $\nabla$  e un vettore
- Laplaciano, è la divergenza del gradiente:  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  è la somma delle derivate seconde
- tensore degli sforzi di Reynolds  $\mathbf{T} = T_{ij} = -\overline{u_i u_j}$  è la media dei prodotti delle fluttuazioni delle velocità

Le eqz. di Reynolds prese così sono abbastanza inutili perché il problema della turbolenza si è riversata nella correlazione del tensore degli sforzi di Reynolds, ovvero quest'ultimo fa decomposizione di Reynolds e sver-mediano nel tempo le eqz. di Navier-Stokes funziona solo in parte perché elimina i valori istantanei di velocità, ma nasce il tensore degli sforzi di Reynolds che è costituito dal prodotto delle fluttuazioni, se si fa sver-mediano non si conoscono a priori. Nasce quindi il problema di chiudere la turbolenza, cioè legare le componenti del tensore degli sforzi alle quantità medie effettuando la chiusura di Boussinesq: è un metodo per chiudere la turbolenza cioè di correlare il termine  $-\overline{u_i u_j}$ .

La **chiusura di Boussinesq** permette di correlare le componenti del tensore degli sforzi introducendo un parametro detto viscosità turbolenta  $\mu_T$ :

$$\frac{T_{ij}}{\rho} = -\overline{u_i u_j} = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij}$$

$\mu_T$  = viscosità turbolenta (non è una proprietà del fluido come la viscosità cinematica  $\nu$ ) bensì è una proprietà del flusso e va correlata con di ogni campo di moto (cambia per ogni campo di moto) e dipende dallo spazio e dal tempo. Per ora  $\mu_T$  è un'incognita, necessaria di un'ulteriore correlazione

$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  = tensore delle velocità di deformazione del campo di moto medio

$\delta_{ij}$  = operatore di Kronecker  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i=j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$

$K$  = energia cinetica turbolenta ed è la somma degli scarsi quadratici medi delle fluttuazioni, quindi  $K$  si porta dietro l'informazione della turbolenza

$$K = \frac{1}{3} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

poiché noi calcoliamo la divergenza del tensore di Reynolds che con la chiusura di Boussinesq diventa:

$$\nabla \cdot \tau = \rho \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \right] \delta_{ij}$$

allora poiché c'è  $\delta_{ij}$  si ottiene che la divergenza del tensore è pari a  $\frac{2}{3}$  gradiente dell'energia cinetica turbolenta:

$$\nabla \cdot \tau = \frac{2}{3} \nabla \cdot K = \frac{2}{3} \nabla \left[ \frac{1}{3} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \right]$$

Il gradiente dell'energia cinetica turbolenta lo posso combinare con il gradiente della pressione  $\nabla P$  zicco quindi:

$$\nabla P + \nabla \frac{2}{3} K = \nabla \left( P + \frac{2}{3} K \right)$$

ecco che quindi si definisce una pressione termodinamica  $\hat{P}$ :

$$\hat{P} = P + \frac{2}{3} K \quad \Rightarrow \quad \nabla \hat{P} = \nabla \left( P + \frac{2}{3} K \right)$$

quindi si usa  $\nabla \hat{P}$  e nell'eq. (1) non si usa più come pressione massima della reale bensì la pressione termodinamica e quindi non è necessario considerare l'energia cinetica turbolenta.

Si deve però considerare la viscosità turbolenta  $\nu_t$ , si può dire che  $\nu_t$  è correlato mediante una lunghezza di mescolamento:

$$\nu_t = k \mu_* \hat{z} \left( 1 - \frac{\hat{z}}{y} \right)$$

- $k$  = costante di Van-Karman ( $k \approx 0.41$ )
- $\mu_*$  = velocità di attrito, correlata alla velocità di parete ed è definita come:

$$\mu_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

- $\tau_0$  = tensione di parete, in questo caso del fondo
- $\rho$  = densità del fluido

- $\hat{z}$  = distanza dal fondo, definito come:  $\hat{z} = z - \eta$

La viscosità turbolenta  $\nu_t$  per come è stata definita è nulla per:

$$\nu_t = 0 \text{ per } \begin{cases} \hat{z} = 0 & \text{(per } z = \eta \text{) sul fondo} \\ \hat{z} = y & \text{sulla superficie libera} \end{cases}$$

La viscosità turbolenta  $\nu_t$  è nulla sul fondo e sulla superficie libera quindi ha un profilo parabolico, passa da zero ad un massimo e torna a zero andando dal fondo verso la superficie libera.

Sono necessarie le condizioni al contorno che dicono come sentire le condizioni fisiche sui bordi del dominio che sono il fondo e la superficie libera.



CONDIZIONI AL CONFINIO:

1. La PARETE DEL FONDO se considerata IMPERMEABILE e non soggetta a MOVIMENTAZIONE (possono esistere anche le pareti spondali) e RIGIDA, il campo di moto è nullo (sia componenti tangente che normale alla parete)

$$\vec{U} = 0 \quad \text{parete solida, impermeabile e rigida}$$

La condizione di annullamento della componente tangenziale è detta condizione di non slittamento, la condizione di annullamento della componente normale è detta condizione di impermeabilità.

2. Sulla SUPERFICIE LIBERA ( $\sim$ ) di interfaccia aria-acqua (il fondo e anche esso una superficie libera perché eutro e spesso non è impermeabile) poniamo 2 condizioni al contorno:

- 2.1. CONDIZIONE CINEMATICA: La velocità della particella che si trova sulla interfaccia aria-acqua deve essere pari alla velocità della superficie stessa. Se la velocità della particella ha solo componente verticale, lungo z, si può dire che la velocità  $w$  è:

$$w = \frac{D\eta}{Dt}$$

cioè se la particella sulla superficie libera (in  $z=h$ ) si sta muovendo verso l'alto, si sta portando dietro una definizione della linea della superficie stessa, ecco perché la velocità della particella deve coincidere con la velocità della superficie, con la derivata totale della quota che definisce la superficie libera. Scrivendo la derivata totale:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0 \quad \text{calcolato in } z=h$$

- 2.2. CONDIZIONE DINAMICA: impone una conservazione degli stress a cavallo dell'interfaccia aria-acqua. Per la conservazione della quantità di moto, lo stress unitario subito sopra l'interfaccia deve essere pari allo stress unitario subito sopra l'interfaccia altrimenti l'interfaccia non è in equilibrio.

Lo stress unitario  $\vec{\phi}$  attraverso il teorema di Cauchy è definito come il prodotto scalare tra il tensore degli stress  $T$  e il vettore normale alla superficie stessa.

$$\vec{\phi} = T \cdot \vec{n}$$

Si assume che in aria lo stress unitario è essenzialmente nullo perché si trascura l'effetto di riscaldamento della corrente aerea sulla superficie stessa e si pone la pressione atmosferica pari a zero sull'interfaccia.

Quindi se lo stress unitario dalla parte aria è nullo, allora deve essere nullo anche dalla parte della fase liquida, sono all'interfaccia e quindi sia la componente normale che quella tangenziale dello stress unitario  $\vec{\phi}$  sono nulle.

Scrivendo il tensore degli stress  $T$  come una componente diagonale più una componente deviatorica, l'annullamento della componente normale impone la seguente condizione:

$$\vec{n} \cdot (-pI + T) \cdot \vec{n} = 0$$

L'annullamento della componente tangenziale lungo x e y è:

$$\vec{t}_x \cdot (-pI + T) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{t}_y \cdot (-pI + T) \cdot \vec{n} = 0$$

date:

- P = matriça diagonală
- I = matriçe unitară
- T = componente descriptivă
- $\vec{n}$  = componente normală del versore  $\perp$  alla superficie
- $\vec{t}_x$  = componente lungo x del versore tangente alla superficie
- $\vec{t}_y$  = componente lungo y del versore tangente alla superficie

3. CONDIZIONE CINEMATICA SULLA SUPERFICIE LIBERA DEL FONDO è simile alla condizione cinematica della superficie libera propriamente detta. La velocità della particella che si trova sul fondo deve essere pari alla velocità del fondo. Quindi, al posto di avere h, si ha  $\eta =$  quota del fondo.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0 \quad \text{calcolato in } z = \eta$$

Il problema così impostato, dal punto di vista matematico, non è semplice perché le equazioni sono equazioni alle derivate parziali, dipendenti da spazio e tempo, non lineari. È raro quindi che nell'idraulica e fluidica vengono adottate direttamente tali equazioni, se non per studi di zone localizzate quali lo studio del campo di moto di un vortice che si genera a zoccolo di una pala in alveo che interagisce con la corrente ed il zoccolo solido. Il vortice crea una buca di scavo a valle della pala stessa, e una sinuosità molto locale e spesso per descriverla si ricorre all'eqz. di Reynolds con l'uso della Boussinesq

In generale però, quando si vogliono eseguire studi a scale più elevate, che coinvolgano l'intero alveo o per lo studio dei profili di zoccolo, la regolazione del fondo, ecc. allora le eqz. di Reynolds sono troppo complicate, pertanto si cerca di semplificare le eqz. di Reynolds facendo leva su aspetti fondamentali del fiume.

Il fiume è una corrente con **ACQUE BASSE**, cioè si ha una separazione delle scale dal punto di vista geometrico:

- da un lato si ha la scala delle profondità  $Y_0$  ( $Y_0 \approx$  metri + decine di metri)
- da un lato si ha la scala delle lunghezze nella direzione longitudinale e trasversale, la scala delle lunghezze orizzontali:  $L$  ( $L \approx$  centinaia metri ÷ km)

Per semplificare le eqz. di Reynolds si usa quindi l'ipotesi di **ACQUE BASSE** (shallow water)

$$Y_0 \ll L$$

cioè la scala delle profondità è molto minore della scala delle lunghezze orizzontali.

**MODELLO SHALLOW-WATER 3D:**

Grazie all'ipotesi di acque basse, l'eqz. di continuità (2)

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

permette di capire gli ordini di grandezza delle componenti di velocità, eseguiamo quindi un'analisi di grandezza dei singoli termini: definisco con  $U_0, V_0$  e  $W_0$  le scale caratteristiche delle velocità  $U, V, W$  allora:

- $\frac{\partial U}{\partial x}$  : ha un'ordine di grandezza pari a  $\frac{U_0}{L}$  (su L perché U è una velocità longitudinale)
- $\frac{\partial V}{\partial y} \sim \frac{V_0}{L}$  (su L perché V è una velocità trasversale e  $V_0$  è la scala caratteristica della velocità trasversale)
- $\frac{\partial W}{\partial z} \sim \frac{W_0}{Y_0}$  (su  $Y_0$  perché  $W_0$  è la scala caratteristica della velocità diretta lungo z)

Quindi: l'eq. di continuità (2) ha ordine di grandezza:

$$\nabla \cdot \vec{U} \sim \frac{U_0}{L} + \frac{V_0}{L} + \frac{W_0}{Y_0}$$

Inoltre, in prima approssimazione si può dire che la scala caratteristica delle velocità longitudinali ha lo stesso ordine di grandezza della scala caratteristica delle velocità trasversali:

$$V_0 \approx U_0 \quad (\text{non sempre è così})$$

allora:

$$\sim \frac{U_0}{L} + \frac{U_0}{L} + \frac{W_0}{Y_0}$$

e quindi, il termine  $\frac{U_0}{L}$  deve essere bilanciato dal termine  $\frac{W_0}{Y_0}$ , la somma dei termini si deve bilanciare:

$$\frac{U_0}{L} \sim \frac{W_0}{Y_0}$$

Se definisco un parametro  $S$  come il rapporto tra la scala delle profondità e la scala delle larghezze orizzontali:

$$S = \frac{Y_0}{L}$$

e poiché vale l'ipotesi di acque basse:

$$Y_0 \ll L$$

allora  $S$  è molto minore di uno:

$$S = \frac{Y_0}{L} \ll 1$$

e quindi si ha che  $W_0$  ha ordine di grandezza  $S U_0$

$$W_0 \sim \frac{Y_0}{L} U_0$$

$$W_0 \sim S U_0$$

poiché  $S \ll 1$  allora  $W_0$  ha ordine di grandezza molto inferiore a  $U_0$ :

$$W_0 \ll U_0$$

Quindi, nell'ipotesi di acque basse la componente verticale della velocità  $W$  è tipicamente molto minore di quella longitudinale  $U$ .

Se ripeteremo tal'analisi su una delle equazioni di Reynolds (1) imposteremo cose ancora più utili.

Consideriamo la 3<sup>a</sup> equazione di Reynolds, la componente verticale:

$$\underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_A + \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla W}_B + \underbrace{\rho \cos \theta}_C + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_D + \underbrace{\nabla \cdot (\overline{uw}, \overline{vw}, \overline{ww})}_E = 0$$

dove:

- $\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla w$  è la 3° componente di  $\frac{D\vec{U}}{Dt}$

- $\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} + \vec{w}\vec{w})$  è la 3° componente di  $\nabla \cdot \mathbf{T}$

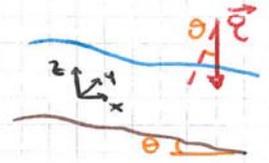
- $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$  è la 3° componente di  $\frac{1}{\rho} \nabla p$

- $g \cos \theta$  è la 3° componente di  $\nabla(\vec{g} \cdot \vec{z}) = \{g \sin \theta, 0, -g \cos \theta\}$

↳ nasce dal fatto che il fiume ha una inclinazione media del fondo pari a  $\theta$ , quindi  $\vec{z}$  ha 2 componenti: una lungo  $x$  e una lungo  $z$ , quindi:

$$\vec{g} \cdot \vec{z} = x g \sin \theta - z g \cos \theta$$

$$\nabla(\vec{g} \cdot \vec{z}) = \left\{ \frac{\partial (x g \sin \theta)}{\partial x}, \frac{\partial (-z g \cos \theta)}{\partial y}, \frac{\partial (-z g \cos \theta)}{\partial z} \right\} = \{g \sin \theta, 0, -g \cos \theta\}$$



Se eseguiamo l'analisi dell'ordine di grandezza dei vari termini, si ha:

A:  $\frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{w_0}{T}$  ( $T = \text{scala dei tempi}$ )

perché  $\begin{cases} w_0 = \delta u_0 \\ T = \frac{L_0}{u_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{\delta u_0}{L_0 / u_0}$

quindi:  $\frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{\delta u_0^2}{L_0}$

B:  $\vec{U} \cdot \nabla w = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \sim u_0 \frac{w_0}{L} + u_0 \frac{w_0}{L} + w_0 \frac{w_0}{y_0}$

perché  $w_0 = \delta u_0$

allora:  $\vec{U} \cdot \nabla w \sim u_0 \frac{\delta u_0}{L} + u_0 \frac{\delta u_0}{L} + \delta u_0 \frac{\delta u_0}{y_0} \sim \frac{\delta u_0^2}{L} + \frac{\delta u_0^2}{L} + \frac{\delta^2 u_0^2}{y_0}$

perché  $\delta = \frac{y_0}{L} \rightarrow y_0 = \delta L$

quindi il 3° termine:  $\frac{\delta^2 u_0^2}{y_0} \sim \frac{\delta^2 u_0^2}{\delta L} \sim \frac{\delta u_0^2}{L}$

quindi:  $\vec{U} \cdot \nabla w \sim \frac{\delta u_0^2}{L}$

C:  $-g \cos \theta \sim g$  perché  $\theta$  è dell'ordine  $\theta \sim 1$  (angolo che porta di fiume  $\theta$  è basso)

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \sim g \cos \theta \sim g$  lo assumiamo dello stesso ordine di  $g \cos \theta$

quindi:  $g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \sim g$

D:  $\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} + \vec{w}\vec{w})$

il tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  parte alla divisione di  $\rho \text{massa}$  per essere sicuro come qualcosa proporzionale alla  $u^2$  sia il numeratore  $\rho$

i term. n.  $\{ \overline{uw}, \overline{vw}, \overline{wv} \}$  sono dell'ordine della viscosità turbolenta  $\nu_T$  per l'ordine di grandezza del tensore della velocità di deformazione in  $\omega$  domina il termine  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  che ha ordine di grandezza  $\frac{U_0}{\lambda_0}$ , quindi:

$$\overline{uw}, \overline{vw}, \overline{wv} \sim \nu_T \left( \frac{U_0}{\lambda_0} \right)$$

applicando la divergenza si ha che tra i 3 termini, quello che domina è il primo

$$\nabla \cdot \{ \overline{uw}, \overline{vw}, \overline{wv} \} = \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{wv}}{\partial z} \sim \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x}$$

perché  $\frac{\partial}{\partial x}$  ha ordine  $\frac{1}{L}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{uw}) \sim \frac{1}{L} \nu_T \left( \frac{U_0}{\lambda_0} \right)$$

ma  $\nu_T$  ha ordine di grandezza:

$$\nu_T \sim \mu_* \frac{\lambda_0}{\rho_0}$$

(dalla media  $\omega \hat{z}$  con  $\hat{z} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y}$ )

perché  $\nu_T = \mu_* \hat{z} \left( 1 - \frac{\hat{z}}{y} \right)$

quindi:  $\nabla \cdot \{ \overline{uw}, \overline{vw}, \overline{wv} \} \sim \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uw}) \sim \frac{1}{L} \left( \frac{\mu_* \lambda_0}{\rho_0} \cdot \frac{U_0}{\lambda_0} \right)$

Ora ci chiediamo quando  $A + B \ll C$

perché A e B hanno lo stesso ordine di grandezza;

$$\frac{\delta U_0^2}{L} \ll \rho$$

ovvero quando:

$$\frac{\delta U_0^2}{\rho L} \ll 1$$

perché  $\delta = \frac{\lambda_0}{L} \rightarrow L = \frac{\lambda_0}{\delta}$

allora  $\frac{\delta U_0^2}{\rho L} = \frac{\delta U_0^2}{\rho \frac{\lambda_0}{\delta}} = \frac{\delta^2 U_0^2}{\rho \lambda_0}$

usando l'ordine di grandezza, si ha:

$$\frac{\delta^2 U_0^2}{\rho \lambda_0} \ll 1$$

perché  $F_r = \frac{U_0}{\sqrt{\rho \lambda_0}}$ , si ha:

$$\delta F_r^2 \ll 1$$

quindi i prim. 2 termini A e B  $\left( \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla w \right)$  sono trascurabili rispetto al 3° termine C  $\left( \rho \cos \theta + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$

In idraulica  $F_r$  è tale condizione è soddisfatta perché  $\delta$  è molto minore di 1 e  $F_r$  di cui non necessariamente deve essere molto minore di 1, può anche essere maggiore di 1, ma il  $\delta^2$  è soddisfatto tale condizione

Al tempo stesso chiediamo quindi il termine  $D \ll C$   
 cioè quando

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{L} \left( \frac{\mu_* \gamma_0}{\rho} \cdot \frac{U_0}{\gamma_0} \right) \ll \rho$$

$$\frac{1}{L} \left( \mu_* \gamma_0 \cdot \frac{U_0}{\rho \gamma_0} \right) \ll \rho$$

poiché  $\delta = \frac{\gamma_0}{L} \rightarrow L = \frac{\gamma_0}{\delta} \rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\delta}{\gamma_0}$

$$\frac{\delta}{\gamma_0} \left( \mu_* \gamma_0 \cdot \frac{U_0}{\rho \gamma_0} \right) \ll \rho$$

semplifico:

$$\delta \mu_* \cdot \frac{U_0}{\rho \gamma_0} \ll \rho$$

poiché  $\begin{cases} \frac{\mu_*^2}{U_0^2} = \frac{\gamma_0}{\rho U_0^2} \\ T_0 = \gamma R_i \end{cases} \quad (T_0 = \text{tensione sul fondo})$

allora  $\frac{\mu_*^2}{U_0^2} = \frac{\gamma R_i}{\rho U_0^2}$

mediante Chezy:  $\frac{\mu_*^2}{U_0^2} = \frac{U_0^2}{\chi^2 U_0^2} = \frac{1}{\chi^2} \rightarrow \frac{\mu_*^2}{U_0^2} = \frac{1}{\chi^2}$

quindi per avere  $Fr^2$  moltiplico e divido per  $U_0$  perché  $Fr^2 = \frac{U_0^2}{g \gamma_0}$

$$\delta \mu_* \cdot \frac{U_0}{\rho \gamma_0} \cdot \frac{U_0}{U_0} \ll \rho$$

$$\delta \mu_* \cdot \frac{1}{\rho} \cdot Fr^2 \ll \rho$$

poiché  $\frac{\mu_*^2}{U_0^2} = \frac{1}{\chi^2} \rightarrow \frac{\mu_*}{U_0} = \frac{1}{\chi}$

$$\delta Fr^2 \frac{1}{\chi} \ll \rho$$

poiché  $\chi$  è dell'ordine di 10, allora  $D \ll C$  se:

$$\delta Fr^2 \ll 100$$

anche tale condizione in idraulica è valida e soddisfacibile.

Quindi mediante l'analisi di grandezze dell'eqz. di Reynolds (a) siamo giunti alla conclusione che possiamo trascurare essenzialmente tutti i termini dell'equazione del termine C e quindi la 3° eqz. di Reynolds si riduce a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \cos \theta = 0$$

riduzione della terza equazione di Reynolds

Tale eqz. ha 2 modi a risolvere: se poniamo la pressione nulla all'interfaccia aria-acqua, per  $z=h$ , otteniamo:

se  $P=0$  in  $z=h$  si ha:

$$P = \rho g (h-z) \cos \theta \sim \rho g (h-z)$$

perché  $\theta$  piccolo,  $\cos \theta \approx 1$

si ottiene di fatto la legge di Stevin:

$$P = \rho g (h-z)$$

imporre una distribuzione idrostatica delle pressioni sulla verticale, la pressione aumenta con la profondità, infatti in  $z=\eta$  si ha la pressione massima:

$$P_{\max} = P(z=\eta) = \rho g (h-\eta) \quad (\text{al fondo})$$

Inoltre, ciò ci permette di risolvere anche altri termini che compaiono nelle altre 2 eqz di Reynolds:

$$\bullet \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\bullet \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = g \frac{\partial h}{\partial y}$$

ecco che la pressione non è più tra le incognite perché ora il gradiente della pressione lo scriviamo come il gradiente di  $h$ .

Si arriva quindi al **MODELLO 3D SHALLOW-WATER**

$$\begin{aligned} (1.1) & \left\{ \begin{aligned} u_t + \vec{u} \cdot \nabla u + g h_x + \nabla \cdot (u \vec{u}) &= 0 \\ v_t + \vec{u} \cdot \nabla v + g h_y + \nabla \cdot (v \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si ha quindi le prime 2 eqz. di Reynolds (perché ora si può già usare per eliminare la pressione) e l'eqz. di continuità.

È un modello 3D quindi le incognite sono  $u, v, w, h, \eta$ , dove  $h$  e  $\eta$  vengono risolte accoppiando le condizioni cinematiche sulla superficie libera (profondamente detta) e al fondo (condizioni al contorno 2.1 e 3)

Tale modello viene usato per calcolare le correnti secondarie nei fiumi meandrosiformi.

, = derivata parziale

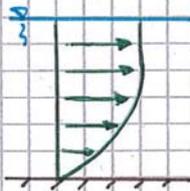
quindi:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + v_y + w_z$$

oss: le correnti secondarie sono delle strutture di moto che hanno un'intensità inferiore rispetto al campo di moto primario (quello delle correnti che per i fiumi è quello bipennato). Tali correnti secondarie sono sovrapposte al campo di moto primario e sono

correnti circolanti. Il classico esempio di corrente secondaria è nel tratto di curva del fiume avente campo di moto primario (1) all'interno con la corrente. Si ha  $v_{est} > v_{int}$  di ogni sezione trasversale (è uguale ed opposta alla forza centrifuga ed è diretta verso l'esterno). La forza centrifuga che una particella subisce a seguito del fatto che sta curvando quindi la particella è direzionata verso l'esterno. La forza centrifuga è proporzionale alla velocità al quadrato ed è inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

Figura 10



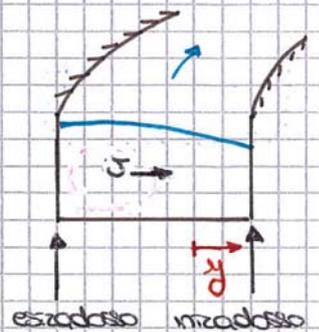
Sulla particella si sviluppa un'intera verticale, tale particella ha un profilo di velocità → della corrente principale quindi si ha una grossa differenza tra le velocità sulla superficie e sul fondo (dove vale la condizione di non slittamento: velocità nulla). Quindi le particelle si spingono a diverse velocità a seconda della quota a cui si trovano e quindi saranno soggette anche a forze centrifughe diverse: le particelle sulla superficie libera sono maggiormente soggette alla forza

centrifuga rispetto alle particelle prossime al fondo.

Inoltre nelle correnti in curva, il campo di moto identificato da linee di corrente prevede che se trascurassimo gli effetti viscosi e applicassimo il teorema di Bernoulli ad un campo di moto curvilineo, le velocità massime sono all'estradosso della curva mentre quelle minime sono all'estradosso. Ciò è tipico delle correnti viscosi dove si hanno velocità massime andando verso l'interno del vortice.

Il fatto che le velocità siano massime all'intadosso e minime all'estradosso, unito al teorema di Bernoulli, pone una sopravvalutazione della superficie libera e quindi la superficie libera all'estradosso ha quota superiore, mentre la superficie libera all'intadosso ha quota inferiore.

Poiché la superficie libera deve avere il gradiente di pressione verticale, tanto più è alta la superficie libera tanto più la pressione è elevata poiché la legge di Stevin dice che la pressione aumenta con la profondità e ciò non concorda con il teorema di Bernoulli: per la conservazione del momento di Bernoulli se all'estradosso le velocità sono inferiori, allora le pressioni devono essere maggiori (il che vuol dire superficie libera più alta).



La sopravvalutazione dall'interno verso l'esterno è il risultato del teorema di Bernoulli.

Considerando la sezione trasversale  $\perp$  del fiume in curva avere fondo piano, come deve la superficie libera e si eleva all'estradosso. Coni. vale che la superficie è inclinata con un'angolo che  $\frac{dh}{dy}$  questo stesso ha componente di velocità trasversale. Considerando la  $\frac{dh}{dy}$  diretta verso l'intadosso, si ha:

$$\frac{dh}{dy} < 0$$

quindi la componente di velocità trasversale che nasce è positiva  $v > 0$

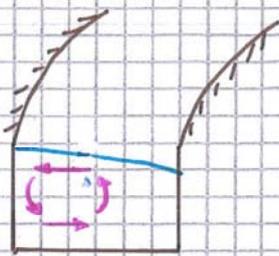
Per il teorema di Bernoulli, per correnti in curva:

- **ESTRADOSSO:** si hanno velocità minime, la superficie libera è più alta e il gradiente di pressione è maggiore
- **INTADOSSO:** si hanno velocità maggiori, la superficie libera è più bassa e il gradiente di pressione è minore

nasce in campo di moto viscoso dall'estradosso verso l'intadosso e tale campo di moto vale sia sulla superficie libera che sul fondo ( $v \rightarrow$ )

Come deve la corrente secondaria in un tratto in curva del fiume è più alta sulla superficie libera e meno in prossimità del fondo. quindi il campo di moto indotto verso l'estradosso a causa della forza centrifuga è più viscoso sulla superficie e libera che sul fondo.

Sommando poi i campi di moto quello dato dal teorema di Bernoulli e quello della corrente secondaria si ha:



- Sulla SUPERFICIE LIBERA domina il volo delle correnti secondarie, il campo di moto è rivolto verso l'estradosso  $\rightarrow$
- Sul FONDO invece il campo di moto è rivolto verso l'inzadosso  $\rightarrow$  perché sul fondo ha corrente secondaria e moto elicoidale e si sottrae al campo di moto di Bernoulli  $\rightarrow$

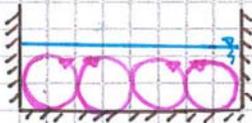
Nasce quindi una corrente circolante per via della componente della corrente secondaria e della approssimazione del teorema di B. Tale corrente circolante si sottrae al campo di moto principale dando origine ad un campo di moto elicoidale.

Le correnti secondarie sono importanti perché mescolano processi erosivi importanti:

- se sul fondo con erosione all'estradosso e deposito all'inzadosso
- se sulla erosione spirale provocando erosione all'estradosso comprendendo la migrazione del meandro.



Per poter modellare correttamente la migrazione del meandro bisogna modellare correttamente l'evoluzione delle correnti secondarie e per fare ciò si usa il modello Shallow-water 3D perché capace di risolvere le correnti elicoidali.



Tale modello Shallow-water 3D è utile anche nel caso di correnti secondarie che si verificano a generare in un canale rettilineo in assenza di curvatura. A causa della rotazione del termine della divergenza  $\nabla \cdot (u\vec{u})$  e  $\nabla \cdot (v\vec{v})$  di  $u$  e  $v$  si può dimostrare che se il rapporto altezza - larghezza non è troppo elevato, si osservano correnti secondarie sovrapposte al campo di moto principale. Sono dette di Jonsson (vortici) alternate con dimensioni pari al raggio stesso (sono circolari). Quindi per studiare, dato che oltre al campo di moto principale dobbiamo considerare le componenti trasversali, serve un modello 3D.

Il modello SHALLOW WATER 3D ha però ancora delle complessità matematiche:

$$\begin{cases} (1.1) & U_t + \vec{U} \cdot \nabla U + gh_x + \nabla \cdot (\overline{u\vec{u}}) = 0 \\ (1.2) & V_t + \vec{U} \cdot \nabla V + gh_y + \nabla \cdot (\overline{v\vec{v}}) = 0 \\ (2) & U_x + V_y + W_z = 0 \end{cases}$$

dove  $\overline{v\vec{v}} = \{ \overline{vu}, \overline{v^2}, \overline{vw} \}$

quindi è bene eseguire un'ulteriore semplificazione ottenendo il

**MODELLO SHALLOW-WATER 2D**

Si cerca di scivolare delle eqz. introducendo delle grandezze  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  che sono le medie sulla verticale delle velocità longitudinali  $U$  e trasversali  $V$ .

$$\tilde{U} = \frac{1}{y} \int_0^h U(x, y, z, t) dz$$

$U$  = componente media della velocità longitudinale

$$\tilde{V} = \frac{1}{y} \int_0^h V(x, y, z, t) dz$$

$V$  = componente media della velocità trasversale

così facendo  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  non sono più dipendenti dalla coord. verticale  $z$ , sono solo più dipendenti da  $(x, y, t)$ :

$$\tilde{U} = \tilde{U}(x, y, t) \quad \text{e} \quad \tilde{V} = \tilde{V}(x, y, t)$$

Tal. DEPTH-AVERAGED VELOCITIES sono l'oggetto di analisi dei modelli idrodinamici e morfodinamici 2D dimensionali. Quindi: la modellazione 2D for zifoculento a  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$ , a profondità di velocità mediate sulla verticale.

Lo scopo è quello di arrivare ad un modello 2D, per fare così scivolo l'eqz. di continuità (a) e le 2 eqz. di Reynolds (1.1) e (1.2) in modalità 2D.

Poniamo quindi le seguenti **CONDIZIONI AL CONTORNO CINEMATICO**:

2.1. sulla superficie libera  $h$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U|_h \frac{\partial h}{\partial x} + V|_h \frac{\partial h}{\partial y} - W|_h = 0$$

3. sul fondo  $\eta$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + V|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} - W|_\eta = 0$$

Usiamo la regola di Leibnitz (regola di integrazione) che è un'estensione a più variabili della formula di integrazione per parti:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial P(x, z)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} P(x, z) dz - P(x, b) \frac{\partial b}{\partial x} + P(x, a) \frac{\partial a}{\partial x}$$

dove:  $P(x, b) \frac{\partial b}{\partial x}$  e  $P(x, a) \frac{\partial a}{\partial x}$  sono termini di bordo

Consideriamo l'eqz. di continuità (a):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

integrando tra  $\eta$  e  $h$ :

$$\int_{\eta}^h \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] dz = 0$$

applicando la regola di Leibnitz:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^h \frac{\partial U}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h U dz - U|_h \frac{\partial h}{\partial x} + U|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ \int_{\eta}^h \frac{\partial V}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h V dz - V|_h \frac{\partial h}{\partial y} + V|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ \int_{\eta}^h \frac{\partial W}{\partial z} dz &= -W|_h + W|_\eta = 0 \end{aligned}$$

oss:  $h$  e  $\eta$  di pendono da  $(x, y, t)$  e non da  $z$ .

Osservando le condiz. cinematiche 2.1 e 3. vediamo che compaiono i termini di bordo a rapporto della regola di Leibniz quindi i termini di bordo li raggruppo e li porto fuori a  $\frac{\partial h}{\partial t}$  e  $-\frac{\partial \eta}{\partial t}$

Perche vale:

$$y = h - \eta$$

allora

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (h - \eta) = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Inoltre, guardando la definizione di  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$ :

$$\tilde{U} = \frac{1}{y} \int_{\eta}^h u \, dz \rightarrow \int_{\eta}^h u \, dz = y \tilde{U}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{y} \int_{\eta}^h v \, dz \rightarrow \int_{\eta}^h v \, dz = y \tilde{V}$$

quindi i termini della regola di Leibniz diventano:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h u \, dz = \frac{\partial}{\partial x} (y \tilde{U})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h v \, dz = \frac{\partial}{\partial y} (y \tilde{V})$$

Quindi l'eqz. di continuita' integrata sulla verticale diventa:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (y \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (y \tilde{V}) = 0 \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA' MEDIATA SULLA VERTICALE}$$

$$y_{,t} + (y \tilde{U})_{,x} + (y \tilde{V})_{,y} = 0$$

Ripetendo la stessa procedura per le 2 eqz. di Reynolds (1.1) e (1.2), integrando sulla verticale la conservazione della quantità di moto di Reynolds e applicando la regola di Leibniz si ottiene:

$$(1.1) \quad \tilde{U}_{,t} + \tilde{U} \tilde{U}_{,x} + \tilde{V} \tilde{U}_{,y} = -gh_{,x} + \frac{\tau_{x1\eta} + \tau_{x1h}}{\rho y} + \frac{1}{\rho y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y \hat{T}_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (y \hat{T}_{xy}) \right]$$

$$(1.2) \quad \tilde{V}_{,t} + \tilde{U} \tilde{V}_{,x} + \tilde{V} \tilde{V}_{,y} = -gh_{,y} + \frac{\tau_{y1\eta} + \tau_{y1h}}{\rho y} + \frac{1}{\rho y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y \hat{T}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (y \hat{T}_{yy}) \right]$$

Quindi il **MODELLO 3D SHALLOW-WATER:**

$$\begin{cases}
 (1.1) & \tilde{U}_{,t} + \tilde{U}\tilde{U}_{,x} + \tilde{V}\tilde{U}_{,y} = -gh_{,x} + \frac{\tilde{T}_x/\eta + \tilde{T}_x/\beta}{\rho y} + \frac{1}{\rho y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\gamma \hat{T}_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \hat{T}_{xy}) \right] \\
 (1.2) & \tilde{V}_{,t} + \tilde{U}\tilde{V}_{,x} + \tilde{V}\tilde{V}_{,y} = -gh_{,y} + \frac{\tilde{T}_y/\eta + \tilde{T}_y/\beta}{\rho y} + \frac{1}{\rho y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\gamma \hat{T}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \hat{T}_{yy}) \right] \\
 (3) & \gamma_{,t} + (\gamma \tilde{U})_{,t} + (\gamma \tilde{V})_{,t} = 0
 \end{cases}$$

Tale modello viene usato dai software di modellazione fluida

- $\tilde{T}_x$  e  $\tilde{T}_y$  sono le componenti lungo x e lungo y dello sforzo al fondo  $\eta_0$  dello strato sulla superficie libera h.
- $\hat{T}$  è il tensore degli sforzi, ha 4 componenti di cui due sono simmetriche ( $\hat{T}_{xx}, \hat{T}_{xy}, \hat{T}_{yx}, \hat{T}_{yy}$ ).

Il tensore degli sforzi è pari a:

$$\hat{T}_{ij} = \tilde{T}_{ij} + T_{ij}^{(disp)}$$

con:

$$\tilde{T}_{ij} = -\frac{\rho}{y} \int_{\eta}^h u_i u_j dz$$

il tensore degli sforzi di Reynolds, è la media sulla verticale degli sforzi di Reynolds. Tali sforzi di Reynolds sono prodotti di fluttuazioni nel tempo.

$$T_{ij}^{(disp)} = -\frac{\rho}{y} \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz$$

dove  $(U - \tilde{U})$  è lo scarto rispetto alla media sulla verticale della velocità longitudinale e  $(V - \tilde{V})$  è lo scarto rispetto alla media sulla verticale della velocità trasversale.

Gli sforzi dispersivi  $T_{ij}^{(disp)}$  sono un integrale di un prodotto di 2 scarti mediati sulla verticale, non sono veri sforzi, ma sono chiamati così perché hanno un'analoga con gli sforzi di Reynolds perché sono prodotti di scarti mediati nello spazio sulla verticale, anziché nel tempo come quelli di Reynolds. Dimensionalmente sono degli sforzi perché sono delle velocità al quadrato moltiplicate per la densità.

Tali sforzi sono detti dispersivi perché lo dispersione è un meccanismo di trasporto di quantità scalari quali: concentrazioni di inquinanti, temperatura o solido sospeso ecc. Nel trasporto tali quantità quando si vede pure l'attenzione alle mappe bidimensionali scalari, cioè quando si fa un'media sulla verticale si vede che le concentrazioni mediate sulla verticale usciranno torrenze del fatto che il campo di moto che si sta mediando sulla verticale ha un profilo diverso per la componente longitudinale e uno diverso per quella trasversale. Mediando il prodotto dei 2 profili, il risultato non è semplicemente il prodotto delle medie perché nei profili non sono lineari. Nella dispersione entra forte anche in gioco l'accoppiamento descritto da 2 integrali qui sopra riportati.

Nella dispersione alla Taylor si studia una concentrazione mediata lungo una direzione e il fatto che il profilo di velocità non sia piatto gioca un ruolo fondamentale nel generare tale dispersione.

MODELLO 2D SHALLOW-WATER APPROSSIMATO:

Applichiamo alcune approssimazioni: alle eqz. (1.1) e (1.2) di Reynolds.

1. Si può dire che lo sforzo calcolato in  $z=h$ , quindi i termini  $\hat{T}_{x|B}$  e  $\hat{T}_{y|B}$  quindi le tensioni sulla superficie libera, cioè le azioni di trascinamento delle correnti aree sul liquido sono trascurabili, sono l'effetto dell'azione di trascinamento di una corrente area sulla superficie libera.

$$\hat{T}_{x|B} = 0 \quad \hat{T}_{y|B} = 0$$

2. Per stud. legati alle borse  $\tau_{B|A}$ : i termini  $\hat{T}_{ij}$  si può trascurare (i modelli numerici non eseguono tale approssimazione)

$$\hat{T}_{ij} = 0$$

3. Infine si introduce una ch. usza per le tensioni al fondo, si cerca di le pare le tensioni al fondo  $\hat{T}_{x|D}$  e  $\hat{T}_{y|D}$  con le grandette in gioco che sono le componenti calcolate  $\vec{T}_{x|D}$  e  $\vec{T}_{y|D}$  nel campo di moto:

$$\left\{ \hat{T}_x, \hat{T}_y \right\}_{|D} = \vec{T} = -c_f \rho \vec{U} |\vec{U}| = \begin{cases} -c_f \rho \vec{U} |\vec{U}| \\ -c_f \rho \vec{V} |\vec{V}| \end{cases}$$

$c_f$  = coef. di attrito proporzionale al coef. di Chezy

Scavo quindi una ch. usza tipo la legge di Chezy. La legge di Chezy lega la tensione al quadrato della velocità. (In questa espressione stiamo dovendo dei quadrati delle velocità, il modulo è inserito perché così si può conservare il segno delle tensioni:  $\hat{T}_{x|D}$  e  $\hat{T}_{y|D}$ )

Davanti a noi l'espressione c'è il segno negativo ( $-c_f$ ) perché è legato al fatto che per  $\hat{T}_x$  e  $\hat{T}_y$  stiamo intendendo le tensioni applicate alla fase liquido che agiscono sul liquido, non le tensioni che il liquido esercita sul solido perché questo è in bilancia della quantità di moto per la fase liquido.

Infine la componente lungo  $x$  della tensione calcolata sul fondo è negativa quando la velocità è positiva:

$$\hat{T}_{x|D} < 0 \quad \text{per } U > 0$$

quindi si ha un effetto di attrito che il fondo sta esercitando sulla fase liquido, essendo la tensione del fondo lungo  $x$  negativa, riduce il campo di moto puntando indietro dall'attrito che è proporzionale alla velocità al quadrato.

Infine con il modulo generalizziamo la legge di Chezy ad un caso bidimensionale:

$$|\vec{U}| = \sqrt{\vec{U}^2 + \vec{V}^2}$$

La legge di Chezy, in realtà è pensata per un moto uniforme monodimensionale (quindi generalizzando al caso ad n dimensioni come della componente trasversale della velocità  $\vec{V}$ ).

Eseguiamo quindi le seguenti approssimazioni:

1.  $\hat{T}_{x|B}, \hat{T}_{y|B} = 0$

2.  $\hat{T}_{ij} = 0$

$$3. \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = -\alpha_f \rho \vec{U}|\vec{U}|$$

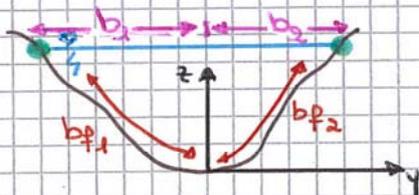
otteniamo il modello **SHALLOW-WATER 2D APPROSSIMATO:**

$$\begin{cases} (1) \frac{D\vec{U}}{Dt} = -g \nabla h - \frac{\alpha_f}{y} \vec{U}|\vec{U}| \\ (2) \frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U}y) = 0 \end{cases}$$

Tale modello shallow-water 2D approssimato è molto diffuso nella modellistica idraulica della morfodinamica fluviale. In particolare si usa per descrivere l'evoluzione del fondo per studiare le barre alternate. Le barre alternate sono delle strutture del fondo che scollano con la lunghezza del fiume e si ripartono per 2-3-4 volte la lunghezza del fiume e corrispondono tutta la lunghezza del fiume, sono dei depositi alternati spazialmente tra le 2 sponde, presentano elevazioni dinamiche.

**MODELLO SHALLOW-WATER 1D**

In questo modello non si ha più la componente trasversale della velocità  $\vec{V}$  e della direzione trasversale, si hanno solo più le componenti longitudinale. Tale modello 1D lo uso per l'analisi principale, per gli attraversamenti di ponti e per lo accoppio al modello 2D per le aree potenziali. Conviene usare un modellamento accoppiato 1D e 2D perché quello 1D va bene per il calcolo preliminare per una valutazione qualitativa.



Considero una sezione trasversale e posiziona il sistema di riferimento (y,z) nella linea di Thalweg, nel punto di minima pendenza. Così facendo spezzo le tensioni della superficie libera in 2 tratti fessati:  $b_1$  e  $b_2$  e definiamo quindi due perimetri bagnati  $bp_1$  e  $bp_2$ .

Il rione y ha dominio tra  $b_1$  e  $b_2$ :  
 $y \in [-b_1, b_2]$

La larghezza complessiva della superficie libera è:

$$b = b_2 - b_1$$

La larghezza complessiva del fondo è:

$$bp = bp_2 - bp_1$$

Applico il ipotesi di acque basse:

$$\delta = \frac{y_0}{L} \ll 1$$

per  $L = b$  si ha:  $\frac{y_0}{b} \ll 1$

allora la sezione trasversale è molto shallow, il suo fattore di forma è molto alto.

Definisco il parametro  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{b}{L} \ll 1$$

quindi la larghezza  $b$  è molto minore della lunghezza longitudinale  $L$ .

Si ha quindi una separazione delle scale:

$$y_0 \ll b \ll L$$

$b$  = scala della larghezza del fiume  
 $L$  = scala della lunghezza del fiume  
 $y_0$  = scala del ronzante

Se valgono queste condizioni è giusto l'analisi degli ordini di grandezza delle equazioni (1.1) e (1.2) di Reynolds del modello 2D shallow-water per pag. 15 e trascrivo:

• velocità trasversale  $\tilde{v} = 0$

• derivata  $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$

• tensore degli sforzi di Reynolds  $T_{ij} = 0$

rimango solo il termine degli sforzi dispersivi  $T_{xx}^{(disp)}$  e  $T_{xy}^{(disp)}$ , ovvero:

$$(1) \left( y \tilde{u} \right)_{,t} + \left( y \tilde{u}^2 \right)_{,x} + \left( y \tilde{u} \tilde{v} \right)_{,y} = -gh_{,x} + \frac{T}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left\{ \left( y T_{xx}^{(disp)} \right)_{,x} + \left( y T_{xy}^{(disp)} \right)_{,y} \right\}$$

rimango:

$$\bullet \frac{1}{\rho} T_{xx}^{(disp)} = (1 - \beta_1) \tilde{u}^2$$

$$\bullet \frac{1}{\rho} T_{xy}^{(disp)} = (1 - \beta_2) \tilde{u} \tilde{v}$$

$$\text{perché: } \frac{1}{\rho} T_{xx}^{(disp)} = -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h (\tilde{u} - \bar{u})^2 dz$$

sviluppo il quadrato e fattorizzo:

$$= -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h (\bar{u}^2 + \tilde{u}^2 + 2\bar{u}\tilde{u}) dz = -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h \bar{u}^2 dz - \frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h \tilde{u}^2 dz - \frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h 2\bar{u}\tilde{u} dz$$

$\bar{u}$  non dipende da  $z$  e si omette quindi:

$$= -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2 - 2\bar{u} \frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h \tilde{u} dz$$

$$\text{perché } \bar{u} = \frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h \tilde{u} dz$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\rho} T_{xx}^{(disp)} = -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h U^2 dz - \tilde{U}^2 + 2\tilde{U}^2 = -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h U^2 dz + \tilde{U}^2$$

poiché:  $\frac{1}{\rho} T_{xx}^{(disp)} = (1-\beta_1) \tilde{U}^2$

allora:

$$(1-\beta_1) \tilde{U}^2 = -\frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h U^2 dz + \tilde{U}^2$$

e dunque si ottiene il coeff. di zappaggio  $\beta_1$  e  $\beta_2$  che è pari alla velocità di quadrato media, tra sulla verticale  $\tilde{z}$  zero  $\tilde{z}$  (media al quadrato della velocità):

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma \tilde{U}^2} \int_{\eta}^h U^2 dz$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\gamma \tilde{U}^2} \int_{\eta}^h UV dz$$

con  $\beta_1$  e  $\beta_2$  scavo: termini dispersivi usando esclusivamente le grandezze medie sulla verticale a pari di conoscere il coeff. di zappaggio (quello che vedo nel termine di flusso di quantità di moto dell'eqz. di equilibrio dinamico).

Sostituisco quindi  $\beta_1$  e  $\beta_2$  nell'eqz. (1) di Reynolds:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\gamma \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1 \gamma \tilde{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_2 \gamma \tilde{U} \tilde{V}) = -\rho \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau}{p}$$

medio lungo  $y$ , lungo la direzione trasversale. Usando poi la formula di Leibnitz si ottiene (che i termini di bordo sono proporzionali al termine  $y$  e spariscono perché il rizzante, per definizione, agli estremi del dominio (\*) è nullo).

Integrando sulla direzione trasversale si ottiene:

$$(1) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta \tilde{U}^2 \Omega) = -\rho \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{B}{p} \tau$$

EQUAZIONE DI DE SAINT VENANT

con:

•  $Q$  = portata de fiume come  $Q = \tilde{U} \Omega$

•  $\tilde{U}$  = velocità media su tutta la sezione trasversale

•  $\Omega$  = area della sezione trasversale

•  $B$  = perimetro bagnato  $B = b_p$

•  $\tau$  = tensione media sul fondo

•  $\beta$  = coeff. di zappaggio medio su tutta la sezione trasversale

$$\tilde{U} = \frac{1}{b} \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{\gamma} \int_{\eta}^h U dz dy = \int_{-b_1}^{b_2} \tilde{U}(y) dy$$

$$\beta = \frac{1}{\tilde{U}^2 \Omega} \int_{\Omega} U^2 dz$$

oss: Se  $\beta = 0$ ,  $i^{(disp)} = 0$ , il profilo di velocità è piatto.

All'eqz. di De Saint-Venant accoppio equazione di continuità (2):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Il MODELLO 1D SHALLOW-WATER è dunque:

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta \bar{U}^2 \Omega) = -\rho g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{B}{\rho} \tau \\ (2) & \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

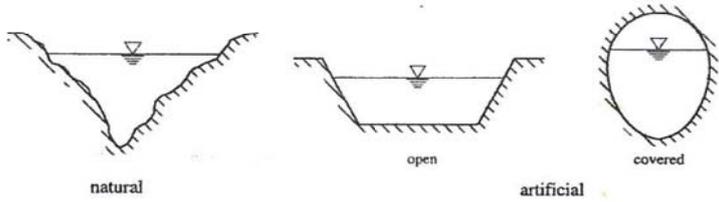


Fig. 1.1 Kinds of channels.

$h = y = \tau \cdot z \cdot m \cdot e$

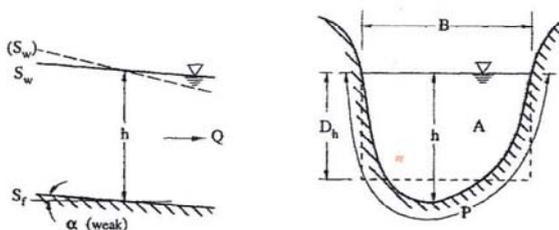


Fig. 1.2 Geometric elements of a channel section.



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

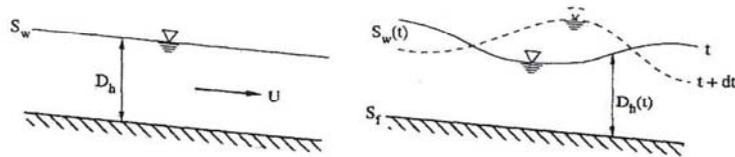


Fig. 1.3 Scheme of steady and unsteady flows.

non uniforme o permanente. con loro permanente si intende un moto costante nel tempo ma variabile nello spazio

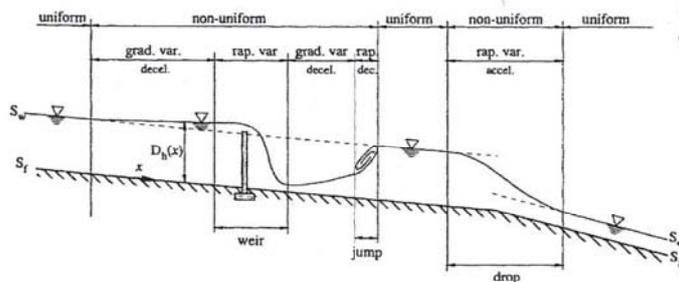


Fig. 1.4 Scheme of steady, uniform and non-uniform flows.

\* altrimenti l'operatore viene portato via dalla corrente, il tirante  $h \approx 50 \text{ cm} - 1 \text{ m}$ , dipende sempre però dalla pendenza del fiume: i fiumi a bassa pendenza hanno un'azione di trascinarsi basso perché la tensione al fondo è proporzionale alla pendenza quindi anche se il tirante è alto non si viene trascinati dalla corrente. Fiumi ad alta pendenza come l'Arno ( $i = 5-7\%$ ) anche un tirante di 2m porta via una persona. Se il tirante è basso è difficile fare delle misure su un unico verticale, ecco due punti: ci si basa su 1-2 misure e da esse si ricava la velocità media usando il profilo di velocità che è un rettangolo corretto e alle formule appropriate qui.



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

Numero di Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

$Fr < 1$  situazione subacma  
 $Fr = 1$  situazione critica  
 $Fr > 1$  situazione supercritica

Numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho UH}{\mu} = \frac{UH}{\nu}$$

Se  $Re$  è definito con il tirante  $H$  e con il raggio idraulico  $R$ :  
 $Re > 2000$  moto turbolento  
 $500 < Re < 2000$  zona di transizione  
 $Re < 500$  moto laminare

Entrando nel diagramma con velocità  $U$  e tirante  $h$  si identifica il tipo di regime in cui siamo (mao bene, mare, di transizione o turbolento) e per le correnti a superficie

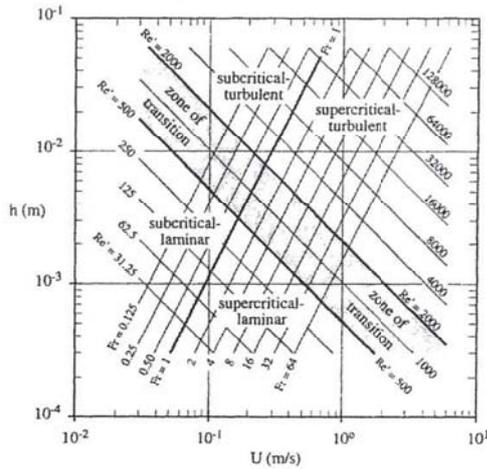


Fig. 1.5 The four regimes of open-channel flow.

libera anche la transizione da subacma a supercritica in cui entra in gioco il n° di Froude



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

Distribuzione della velocità

Con queste 3 formule posso calcolare la velocità media sulla verticale,  $U$ , impiegando poche misure, medi. ane:

- $u_s$  = velocità superficiale
- $u_{0.2}$  = velocità calcolata ad un'altezza del 20% del tirante

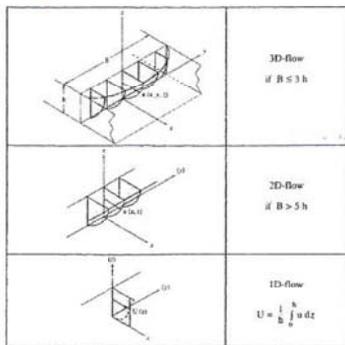


Fig. 1.6 Distribution of velocity.

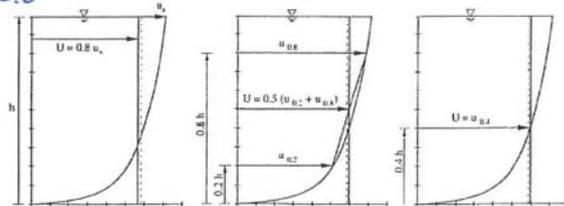


Fig. 1.7 Average velocity.

- $u_{0.8}$  = vel. calcolata ad un'altezza dell'80% del tirante
- $u_{0.4}$  = vel. calcolata ad un'altezza del 40% del tirante

Per misurare la pendenza nel fiume bisogna misurare su verticali diverse app. potremmo farlo medesimo sezione la velocità in una serie di punti. Se per eseguire le misure l'operatore deve entrare in acqua non si può avere tiranti troppo elevati \*

- Formula di Prony
- Formula USGS
- Formula empirica

$$U \approx (0.8 \div 0.9) u_s$$

$$U \approx 0.5(u_{0.2} + u_{0.8})$$

$$U \approx u_{0.4}$$



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

Distribuzione di velocità e sforzi

La velocità ha un profilo logaritmico approssimativo nella inner region dove vale bene la legge logaritmica e l'eq. tra produzione di E turbolenta e dissipazione. Fuori dalla inner region il profilo di velocità logaritmico va corretto con la fine di scivolo.

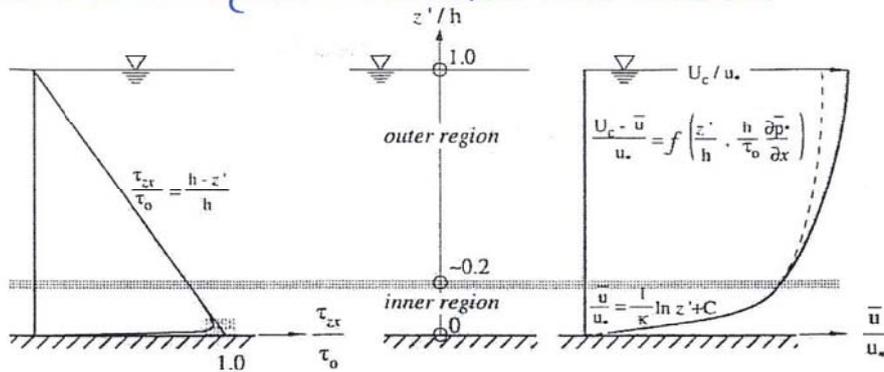


Fig. 2.11 Scheme of the distribution of shear stress,  $\tau_{zx}(z)$ , and of velocity,  $\bar{u}(z)$ ; for uniform flow.

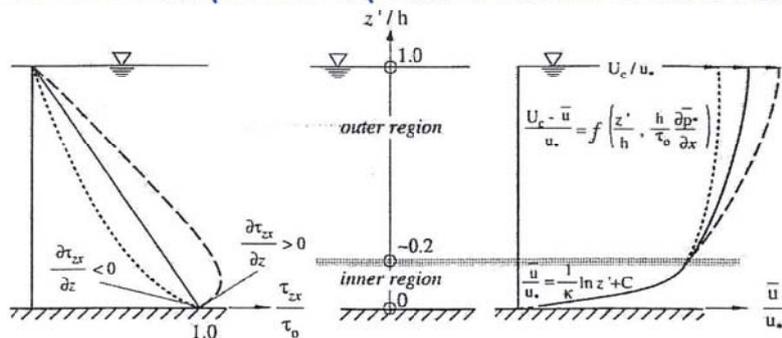
Tale profilo di velocità vale per i moti uniformi, mentre per i moti permanenti c'è una accelerazione o decelerazione longitudinale e quindi il profilo si modifica come segue:



Idraulica Fluviale - Richiami correnti superficie libera

Distribuzione di velocità e sforzi

con accelerazione del campo di moto il profilo di velocità si appiattisce ( $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} > 0$ )  
 con decelerazione del campo di moto il profilo di velocità diventa meno piatto ( $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} < 0$ )



con accelerazione e decelerazione del campo di moto anche la tensione cambia.

uniform flow ———  
 non uniform flow accelerating .....  
 decelerating - - -

Fig. 2.12 Scheme of the distribution of the shear stress,  $\tau_{zx}(z')$ , and of the velocity,  $\bar{u}(z')$ , in non-uniform flow.

Per Gravel-bed Rivers, per fiumi ghiaiosi

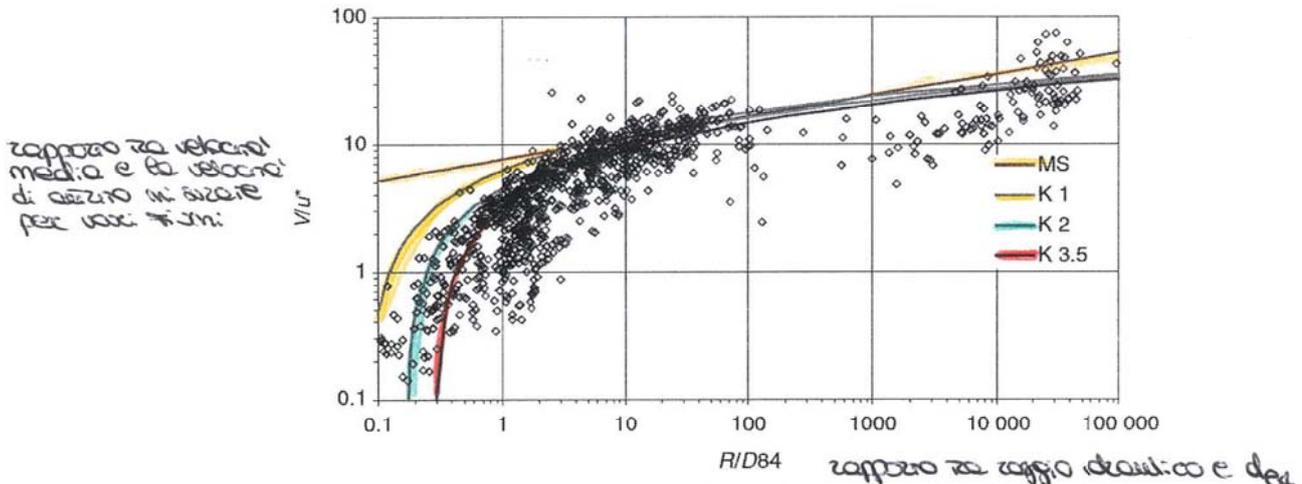
L'altezza della scabrezza  $E$ , qui è  $k_s$ . Nella tabella viene a portata di mano il rapporto che deve esserci tra  $E$  e il quantile della distribuzione granulometrica:

- $E/d_{50}$  : es.  $E = 6.8 d_{50}$
- $E/d_{84}$  : es.  $E = 3.5 d_{84}$
- $E/d_{90}$  : es.  $E = 3.5 d_{90}$

**Table 1** Proposed values of the ratio of roughness height ( $k_s$ ) to median grain size ( $D_{50}$ ) and coarse percentiles ( $D_{84}$  and  $D_{90}$ ) when predicting stream velocity in gravel-bed rivers using a logarithmic resistance equation

Reference	Field area and sample size	$k_s/D_{50}$	$k_s/D_{84}$	$k_s/D_{90}$
Charlton et al. (1978)	UK ( $N=23$ )			3.5
Hey (1979)	UK ( $N=21$ ) and previously published data		3.5	
Bray (1980)	Alberta, Canada ( $N > 300$ , 67 reaches)	6.8	3.5	3.1
Griffiths (1981)	New Zealand ( $N=84$ , 59 reaches)	5.0		
Ferguson (2007)	Compilation ( $N=376$ , 110 reaches)		3.5-4	
López and Barragán (2008)	Compilation ( $N=954$ , > 400 reaches)	6.1	3.1	2.8

Sample size is given as the number of flow measurements ( $N$ ), with the number of reaches also indicated where several measurements were made in some reaches.



**Figure 2** Plot of relative velocity ( $V/u^*$ ) against relative submergence ( $R/D_{84}$ ). Data sources are listed in Table 2. The data comprise measurements at several flow stages in some reaches and at bankfull discharge in others. The curves show predictions by (from top to bottom) the Manning-Strickler equation with constant 7.5 and the Keulegan equation with  $k_s$  equal to 1, 2, or 3.5 times  $D_{84}$ .

quindi, come si evince dalla tabella per i fiumi ghiaiosi il valore di  $E$  è superiore a quelli per canali artificiali (Hempelund-Hansen, Kamphuis, Yang)

Nel pratico si trova:

- $k_1$ : corrisponde a  $k_1 = E = 1 d_{84}$
  - $k_2$ : corrisponde a  $k_2 = E = 2 d_{84}$
  - $k_{3.5}$ : corrisponde a  $k_{3.5} = E = 3.5 d_{84}$
  - MS: corrisponde alla legge di Manning-Strickler
- collocare con la legge Keulegan

Per valori bassi di razione, quando  $y < d_{84}$ , per fiumi ghiaiosi molto ciambosi a stato quasi problemi, la curva non approssima: punti sperimentali