Centro Stampa

N° 4126

ANALISI MATEMATICA 2

TEORIA ESERCIZI 2021-22

DI BALLESTRA MARC

ANALISI II

Ballestra Marc

ANALISI II

Funzioni a 2 o 3 variabili:

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^3$

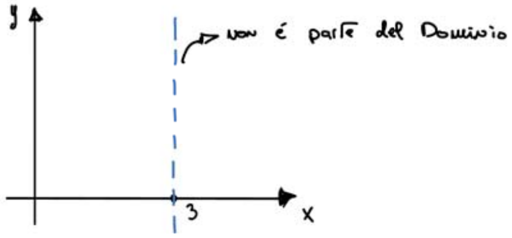
Esempi :

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

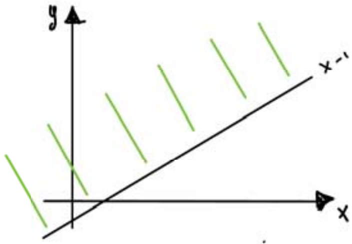
$f(x,y) = e^{x+y} \cos(xy)$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$ $\quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f(x,y) = \dfrac{e^x + y}{x-3}$ $\quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 3\}$

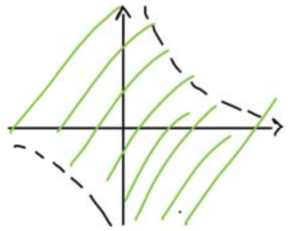


$f(x,y) = \sqrt{y - x + 1}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x - 1\}$



$f(x,y) = \log(1 - xy)$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$

- xy è la funzione iperbole



se $x > 0$: $y < \frac{1}{x}$

se $x < 0$: $y > \frac{1}{x}$

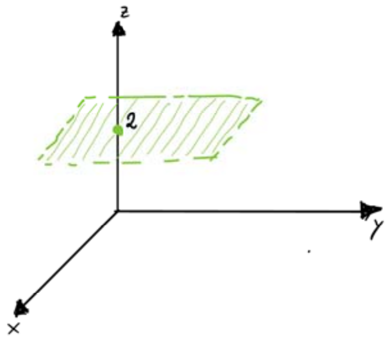
se $x = 0$: $\forall y \in \mathbb{R}$

FUNZIONI A 3 VARIABILI :

Esempi :

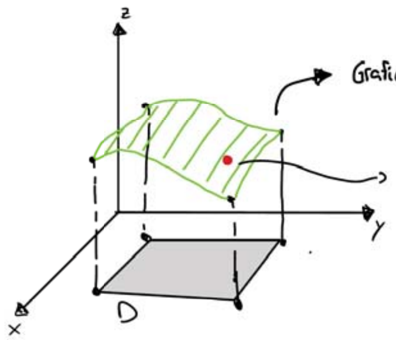
$f(x,y,z) = \sqrt{z - x - y}$ $\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x + y\}$

$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z-2}}$ $\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \neq 2\}$

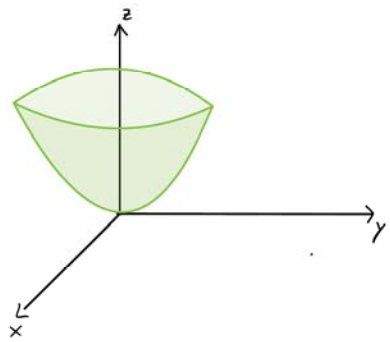


RAPPRESENTAZIONE FUNZIONE A 2 O 3 VARIABILI:

1) In generale il grafico di una funzione a 2 variabili é una superfice in $\mathbb{R}^3$



Es. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad z = x^2 + y^2$ $\quad D = \mathbb{R}^2$



- Per le funz. a 3 variabili non si può rappresentare il grafico

$$f(x, y, z) = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in D ; u = f(x, y, z)\}$$

2) Insiemi di livello:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}^2$

Gli insiemi di livello di f sono i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x,y) = c$$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = c$$

↳ significa intersecare la superficie della funzione con i piani paralleli a (x,y)

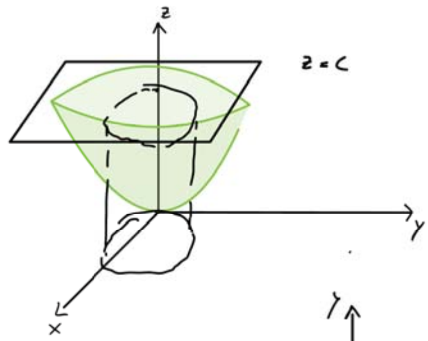
Es. $f(x,y) = x^2 + y^2$

↳ $x^2 + y^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}$

se $c < 0$: $\emptyset$

se $c = 0$: $x^2 + y^2 = 0 \to \{(0,0)\}$

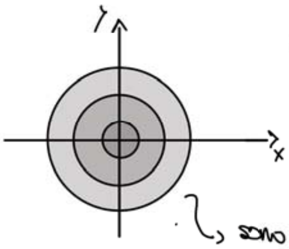
se $c > 0$: $x^2 + y^2 = c \to$ circonferenza di raggio $\sqrt{c}$



In pratica si prende un piano ad una certa quota z e lo si interseca con il grafico in modo da tagliarlo

- In pratica si prende un piano ad una certa quota z e lo si interseca con il grafico in modo da tagliarlo

↳ ottengo una sezione



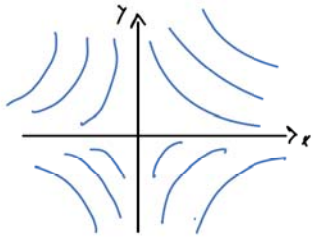
↳ sono i vari livelli al variare di c

$f(x,y) = xy \qquad D = \mathbb{R}^2 \qquad\qquad xy = c$

se $c = 0$: $yx = 0 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ assi cartesiani

se $c > 0$: $y = \frac{c}{x}$

se $c < 0$: $y = \frac{c}{x}$



ESTENSIONE PER 3 VARIABILI:

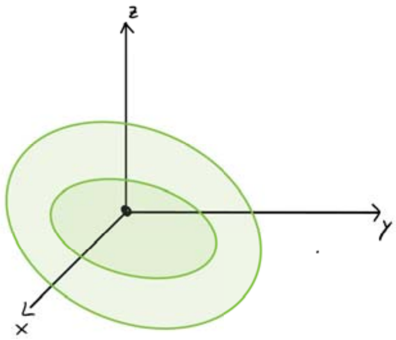
Gli insiemi di livello diventano delle superfici:

Es: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad c \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = c$

se $c = 0$: $(0,0,0)$

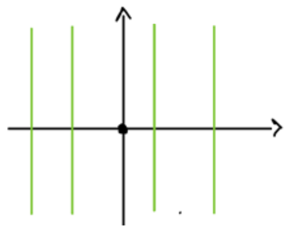
se $c > 0$: sfera di centro origine e raggio $\sqrt{c}$

se $c < 0$: $\emptyset$



CASI PARTICOLARI:

$f(x,y) = x^2$ → solo una variabile

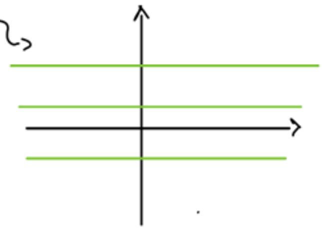


$x^2 = c$ → se $c = 0$: $x = 0$ → asse y

se $c > 0$: $x = \pm c$ → rette // a y

se $c < 0$: $\emptyset$

analogamente $f(x,y) = y^2$ →



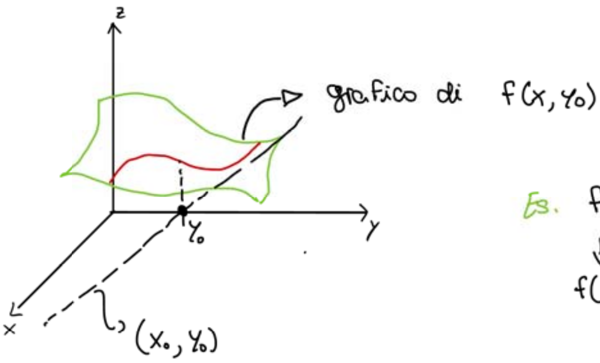
RESTRIZIONI:

Restringere la considerazione di f a certi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$f(x,y)$ fisso $y = y_0$

$\downarrow$

$f(x,y_0)$ è fissato quindi diventa una funzione di una sola variabile



Es. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ fisso $y = 1$

$\downarrow$

$f(x,1) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

LIMITI E CONTINUITA':

Per definire il concetto di limite e continuita' c'e' bisogno di una nozione di distanza.

In $\mathbb{R}$ la distanza é data dal modulo $|x|$ e quella fra due punti $|x-y|$

In $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ si usa la <u>NORMA</u>

$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ preso $P(x,y)$ $\overline{PO} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ preso $P(x,y,z)$ $\overline{PO} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\text{norma di } P = \|P\| \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

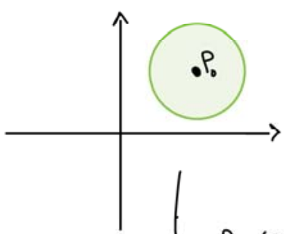
- Tra due punti qualsiasi invece presi $P(x,y)$ e $P_0(x_0,y_0)$

$$\|P-P_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

- analogamente in $\mathbb{R}^3$

DEF: $P_0 \in \mathbb{R}^2$, si definisce intorno di P_0 di raggio r

$$B_r(P_0) = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \|P-P_0\| < r \}.$$ (insieme dei punti che appartengono al cerchio)



$\hookrightarrow B_r(P_0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \}$

DEFINIZIONE DI LIMITE:

frontiera di D

$D \subseteq \mathbb{R}^2 \quad f: D \to \mathbb{R} \quad P_0 \in D \cup \partial D$

si dice che $\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ t.c. $P \in D$ e $0 < \|P - P_0\| < \delta$

$$\Longrightarrow |f(P) - \ell| \leq \varepsilon$$

es. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$

$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad P_0 = (0,0)$

bisogna dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ t.c. $(x,y) \in D : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\Longrightarrow \left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \varepsilon$ quindi $\left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{2\cancel{(x^2+y^2)}|y|}{\cancel{x^2+y^2}}$

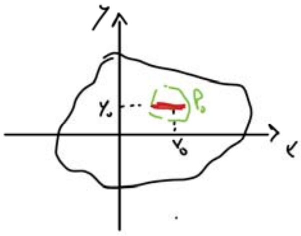
$2|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$

dato $\varepsilon > 0$, basta prendere

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \varepsilon$$

CALCOLO DIFFERENZIALE:

- 2 variabili $f : D \to \mathbb{R}$ $P_0(x_0, y_0)$ interno a D



$f(x, y_0)$ fisso una var e lascio libera l'altra ed essendo di una sola variabile si può considerare la derivata

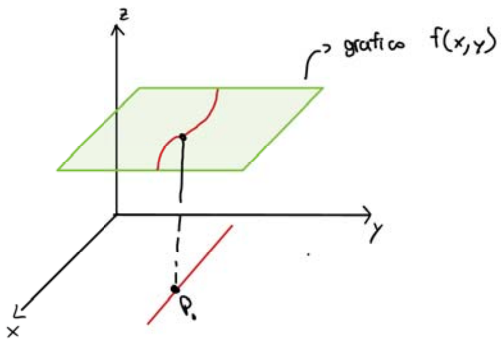
DEF. La funzione f è <u>derivabile parzialmente</u> rispetto a x nel punto P_0 se la funzione $f(x, y_0)$ è derivabile in x_0, cioè se il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \exists$$

- il valore di questo limite si chiama derivata parziale di f rispetto ad x in P_0.

NOTAZIONE: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ oppure $D_x f(x, y_0)$ oppure $\partial_x f(x, y_0)$

analogamente per y $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \exists$



la derivata risulta essere il coeff. angolare della retta tangente alla curva rossa