Centro Stampa

N° 2295

BIOMECCANICA DEI SOLIDI
TEORIA ESERCIZI TEMI ESAME
2017-18

DI MORETTA ANTONIO CARMINE

BIOMECCANICA dei SOLIDI prof. Audenino

TEORIA, ESERCIZI e TEMI d’ESAME

2017/2018

MORETTA ANTONIO

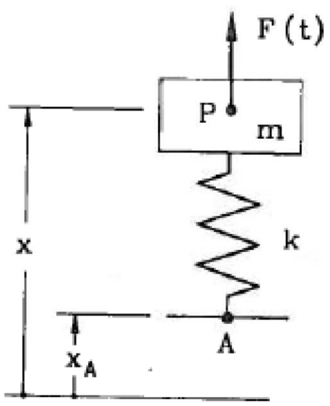
SQUARTINI NICOLÒ

INTRODUZIONE

Per studiare la dinamica delle strutture si fa riferimento a sistemi lineare a uno o più gradi di libertà che permettono di schematizzare e risolvere sistemi apparentemente molto complessi. I risultati ottenuti dalla risoluzione di equazioni differenziali di tali sistemi sono applicabili a fenomeni concreti di natura meccanica. Verranno di seguito descritti i metodi per affrontare tali problemi.

SISTEMI LINEARI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

Equazioni di moto del sistema non smorzato



Il sistema più semplice tra quelli studiati è l'oscillatore meccanico non smorzato ad un grado di libertà, costituito da una massa puntiforme sospesa ad una molla con rigidezza k a cui viene applicata una forza F(t). La massa è soggetta alla forza peso, diretta verso il basso. La figura qui di fianco è un esempio di sistema a 1 g.d.l. non smorzato, dove la coordinata x del punto P (che rappresenta la massa puntiforme) è riferita ad un sistema inerziale, ovvero nel punto O. In questo caso abbiamo il punto di vincolo A che non è fisso, ma si sposta quindi possiamo utilizzare sia un sistema di riferimento assoluto (rispetto all'origine) o un sistema di riferimento relativo rispetto alla posizione del punto A.

Scrivo l'equazione dell'equilibrio dinamico in direzione x:

Sistema di riferimento assoluto → $m\ddot{x}=-k(x-x_A-l_0)+F(t)-mg$

Sistema di riferimento relativo → $m(\ddot{x}+\ddot{x}_A)=-k(x-l_0)+F(t)-mg$

Il sistema di riferimento relativo è comodo quando il punto di vincolo non è fisso, come in questo caso.

La soluzione di un'equazione differenziale di secondo ordine è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa. La soluzione generale si ottiene dal 'moto libero' del sistema, cioè dal comportamento di quest'ultimo abbandonato a sé stesso, quindi dipende da fattori interni al sistema. La soluzione dell'equazione completa esprime il moto causato da un'eccitazione proveniente dall'esterno del sistema. Per ottenere una soluzione unica che si adatti al problema in questione è necessario inserire le condizioni iniziali, in particolare nei sistemi che utilizzeremo si usa la posizione iniziale (x(0)) e la velocità iniziale ($\dot{x}(0)$).

La soluzione particolare dell'equazione precedente si trova annullando la F(t) e $m\ddot{x}$, risulta quindi: kx=-mg. Quindi la soluzione particolare a questo problema è: $x=-\frac{mg}{K}$.

Oscillazioni libere

L'equazione mẍ+kx=0 descrive il comportamento libero del sistema, cioè quando non agisce alcuna forza esterna. Per esprimere la soluzione generale ci sono tre forme:

1) x=$c_1$cos(λt) + $c_2$sin (λt)

ẋ= - λ c_1 sin(λt) + λ c_2 cos (λt)

ẍ=-λ^2 c_1 cos(λt) + λ^2 c_2 sin (λt)

Inserendo tale soluzione nell'equazione mẍ+kx=0 si verifica che la condizione affinché quest'ultima ammetta una soluzione diversa da quella banale x=0 è che la pulsazione λ coincida con la pulsazione propria λn del sistema. (λ= 2πf)

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) x=c*sin(λn t+ϕ)

dove c è l'ampiezza e ϕ è la fase, queste due possono essere espresse in funzione delle costanti c1 e c2.

$$c = \sqrt{c1^2 + c2^2}$$

$$\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{c1}{c2}\right)$$

3) $x = c^* e^{st}$

c^* è un numero complesso

sostituendo $x = c^* e^{st}$

ẋ=s $c^* e^{st}$

ẍ=s^2 $c^* e^{st}$

in mẍ+kx=0 si ottiene: m s^2 $c^* e^{st}$+k $c^* e^{st}$=0→ (m s^2+k) c^*=0 che ammette soluzione diversa dalla soluzione banale solo se m s^2+k=0, cioè s=$\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, dove i è l'unità immaginaria. Dato che l'equazione caratteristica m s^2+k=0 ha due soluzioni, la soluzione completa dell'equazione omogenea mẍ+kx=0 è

$$x = c_1^* e^{i\sqrt{k/m}\,t} + c_2^* e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$$

ricordando che $e^{\pm i\alpha}$=cos$\alpha \pm isin\alpha$ e che (c_1^*)*= c_2^* la soluzione può essere scritta: x=$c_1$cos(λnt)+$c_2$sin (λnt)

con c_1=2Ʀ(c_1*) e c_2^*=-2Im(c_1*)

ovviamente s può essere sostituita con i λt

Equazioni di stato

Posizione e velocità di P rappresentato le variabili di stato del sistema. Può rimanere utile rappresentare il moto nello spazio degli stati, cioè uno spazio identificato da un sistema di riferimento le cui coordinate sono le variabili di stato del sistema. n gradi di libertà implicano uno spazio di stato con 2n dimensioni. Nel caso di sistemi a un grado di libertà le dimensioni dello spazio degli stati sono due e si parla di piani degli stati. I punti che rappresentano lo stato del sistema in istanti successivi descrivono nello spazio degli stati una traiettoria.

Prendendo l'equazione m(ẍ+ẍ$_A$)=k(x-l0)+F(t)-mg , trascurando i termini costanti la riportiamo nella forma: mẍ+kx= -mẍ$_A$+F(t) che può essere scritta in un sistema di due equazioni del primo ordine: {ż}=[A] {z}+[B] {u}

Con {z}=$\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}$, [A]=$\begin{bmatrix} 0 & -k/m \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $matrice\ dinamica$, {u} =$\begin{pmatrix} F(t) \\ \ddot{x}_A(t) \end{pmatrix}$ *vettore degli input*, [B]=$\begin{bmatrix} 1/m & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *matrice dei guadagni*

Oscillazioni forzate

Il sistema può essere eccitato da una forza armonica o dal moto armonico del punto di vincolo A. Una volta definita l'eccitazione, quindi F(t) o X_A(t), sommando una soluzione particolare alla soluzione generale dell'omogenea associata si ottiene la soluzione completa del sistema.

Esaminiamo prima il caso con la <u>forzante armonica</u>:

F=$f_0$cos(λt), consideriamo tale forza come unica causa eccitatrice, allora l'equazione diventa: mẍ+kx=$f_0$cos(λt), la cui soluzione è x=x_0 cos(λt)

ẋ= - λ$x_0$sin(λt)   ẍ=-λ$^2x_0$cos(λt)

$-m\lambda^2 x_0 \cancel{\cos(\lambda t)}+kx_0 \cancel{\cos(\lambda t)}=f_0\cancel{\cos(\lambda t)}$

→ $x_0=\frac{f_0}{(k-m\lambda^2)}$, dove x_0 è l'ampiezza della risposta. Da questa formula osserviamo che a risposta del sistema segue la stessa legge armonica dell'eccitazione.

Ricorda: $\lambda_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Abbiamo tre casi:

- $\boldsymbol{\lambda = \lambda_n}$
- **λ<** $\boldsymbol{\lambda_n}$: caso in cui eccitazione e risposta sono in fase, cioè non c'è ritardo tra le due;
- $\boldsymbol{\lambda >\ \lambda_n}$: caso in cui tra eccitazione e risposta c'è uno sfasamento di 180°, cioè nell'istante in cui la risposta raggiunge il suo massimo in una direzione, l'eccitazione raggiungerà anch'essa il suo massimo ma nella direzione opposta.

Ora esaminiamo il caso con <u>eccitazione dovuta al moto armonico del punto di vincolo A</u>: $x_A=x_{A0}$ cos(λt)

La soluzione è sempre del tipo: è x=x_0 cos(λt) e svolgendo gli stessi passaggi come nel caso precedente si ottiene: $x_0=\frac{kx_{A0}}{(k-m\lambda^2)}$, moltiplicando e dividendo il denominatore per k si ottiene: $x_0=\frac{x_{A0}}{(1-(\frac{\lambda}{\lambda_n})^2)}$. Da quest'ultima formula otteniamo la **risposta in frequenza H($\boldsymbol{\lambda}$)** data dal rapporto tra l'ampiezza della risposta x_0 e l'ampiezza dell'eccitazione x_{A0}→ H(λ)= $\frac{1}{(1-(\frac{\lambda}{\lambda_n})^2)}$, indicata anche come **rapporto di amplificazione**.

H(λ) viene anche utilizzata per esprimere la risposta ad una forza esterna F(t) con andamento armonico nel tempo. Infatti $x_0=\frac{f_0}{(k-m\lambda^2)}$ può essere scritta $x_0=\frac{f_0}{k}$H(λ), con H(λ)=$\frac{x_0 k}{f_0}$

dove $\frac{f_0}{k}$ è lo <u>spostamento in condizioni statiche</u> sotto l'azione di F.

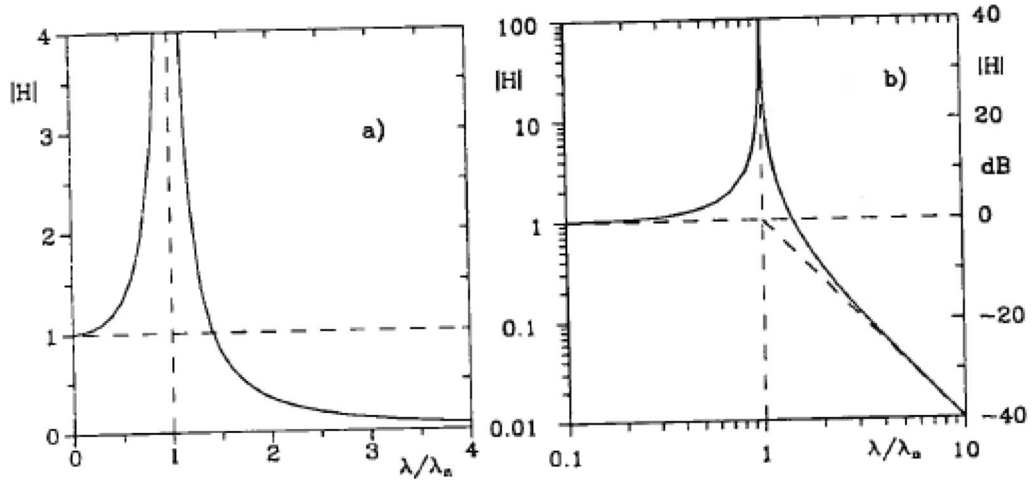
Nel caso non smorzato x_0 ef_0 sono numeri reali e la soluzione completa dell'equazione del moto per un sistema eccitato da una forzante armonica F(t) con pulsazione λ è data dalla risposta libera e dalla risposta forzata. Si ha quindi x=$c_1$cos(λ_nt)+$c_2$sin (λ_nt)+$\Re[\mathrm{H}(\lambda)\frac{f_0}{k}e^{i\lambda t}]$

Ad esempio abbiamo F= $f_0$sin(λt) e il sistema in quiete, quindi in t=0 x=0 e ẋ=0 x(t)=$c_1$cos(λ_nt)+$c_2$sin (λ_nt)+$\Re$[$H(\lambda)\frac{f_0}{k}$sin(λt)]

x(0)=0→ c_1=0

$\dot{x}$(0)=0→$\dot{x}$(t)=x(t)=$-\lambda_n c_1$sin(λ_nt)+$\lambda_n c_2$cos (λ_nt)+λH(λ)$\frac{f_0}{k}$cos(λt)→ c_2=- H(λ)$\frac{f_0}{k}\frac{\lambda}{\lambda_n}$

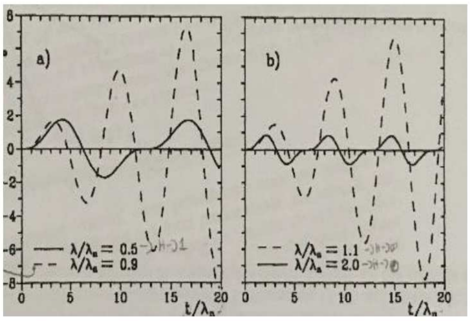
Allora la <u>legge del moto</u> è x(t)=$\frac{f_0}{k}$ H(λ)[sin(λt)- $\frac{\lambda}{\lambda_n}$sin ($\lambda_n$t)]



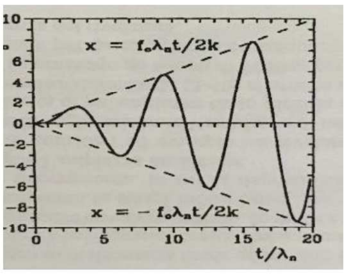
Il fattore amplificazione viene spesso riportato in dB: $\boldsymbol{H_{dB}}$=**20**$\boldsymbol{log_{10}|H|}$ per osservare meglio l'andamento della funzione. I grafici riportati sopra esprimono la risposta in frequenza per scale lineari (a) e scale logaritmiche espresse in dB (b). Lungo l'asse delle ordinate abbiamo il modulo della risposta in frequenza e lungo l'asse delle ascisse abbiamo il rapporto tra la pulsazione della forza eccitatrice e la pulsazione naturale del sistema. Osserviamo che a frequenze basse il fattore di amplificazione vale 1, quindi non c'è alcun effetto dinamico degno di nota, mentre a frequenze molto superiori alla frequenza propria del sistema H tende a 0, in questo caso la massa rimane ferma e indisturbata dalla forzante armonica.

La risposta in frequenza tende alla retta orizzontale H=1 per frequenze tendenti a 0, mentre per frequenze alte la funzione decade con pendenza 40dB/dec. Dove il comportamento del sistema segue la prima retta si ha la prevalenza della rigidezza, in cui le forze inerziali sono trascurabili e quindi F(t) è equilibrata dalla forza elastica della molla. Invece quando il sistema segue la seconda retta il comportamento è dominato dall'inerzia della massa puntiforme, con le forze elastiche trascurabili a causa della piccolezza degli spostamenti. Nella zona in cui la pulsazione della forza armonica tende alla pulsazione del sistema si ha la <u>risonanza</u>, zona in cui l'ampiezza della risposta tende ad infinito; in questa zona il comportamento è governato dallo smorzamento del sistema anche se quest'ultimo è molto piccolo. In condizioni di risonanza le forze elastiche sono in equilibrio con le forze inerziali e quindi solo le forze dovute allo smorzamento possono equilibrare la forza esterna al sistema (F(t)).

Nel caso del moto precedente, con x(t)=$\frac{f_0}{k}$ H(λ)[sin(λt)- $\frac{\lambda}{\lambda_n}$sin ($\lambda_n$t)] abbiamo assenza di smorzamento quindi x(t) mantiene la sua ampiezza inalterata nel tempo. Ora riportiamo alcuni esempi per mostrare il comportamento dell'ampiezza della risposta al variare del rapporto tra le pulsazioni.



Nei grafici in figura di fianco abbiamo in ordinata l'ampiezza della risposta in frequenza. Notiamo che quando il rapporto tra le pulsazioni tende a 0 H ha ampiezza pari a 1, mentre al tendere della pulsazione della forzante alla pulsazione del sistema la risposta tende ad avere una ampiezza infinita. L'ampiezza in risonanza cresce linearmente nel tempo ed impiega un tempo infinito a raggiungere un valore infinito. All'aumentare del rapporto tra le pulsazioni la risposta tende a 0.



In questa figura abbiamo la risposta ad una eccitazione armonica con frequenza uguale alla frequenza propria del sistema. Osserviamo come l'ampiezza della risposta aumenta linearmente nel tempo ed essa è massima quando i due termini armonici raggiungono contemporaneamente il valore massimo, uno negativo e l'altro negativo.

Per trovare l'ampiezza massima prendiamo: $|x|_{MAX} = \frac{f_0}{k}$ H(λ)$\frac{\lambda+\lambda_n}{\lambda_n}$

prendiamo l'espressione H(λ)= $\frac{1}{(1-(\frac{\lambda}{\lambda_n})^2)}$=$\frac{{\lambda_n}^2}{{\lambda_n}^2-\lambda^2}$→ $|x|_{MAX} = \frac{f_0}{k}\,\frac{{\lambda_n}^{\cancel{2}}}{{\lambda_n}^2-\lambda^2}\,\frac{\lambda+\lambda_n}{\cancel{\lambda_n}} = \frac{f_0\lambda_n}{k}$ $\frac{\cancel{(\lambda+\lambda_n)}}{(\lambda_n-\lambda)\cancel{(\lambda+\lambda_n)}}$= $\frac{f_0}{k}\,\frac{\lambda_n}{|\lambda_n-\lambda|}$

inserendo tale espressione nell'equazione x(t)=$\frac{f_0}{k}$ H(λ)[sin(λt)- $\frac{\lambda}{\lambda_n}$sin ($\lambda_n$t)],facendo il limite di λ→ λ_n e applicando il teorema di De L'Hospital si ottiene: - $\frac{f_0}{2k}$ [$\lambda_n cos$ (λ_nt)-

$\lambda_n cos$ (λ_nt)- $\lambda_n{}^2$ tsin (λ_nt)] , i picchi della storia temporale si verificano negli istanti in cui si annulla in sin cioè per t=$\frac{i\pi}{\lambda_n}$

In tali istanti l'ampiezza vale: $|x|_{MAX} = \frac{f_0}{2k} n\pi$

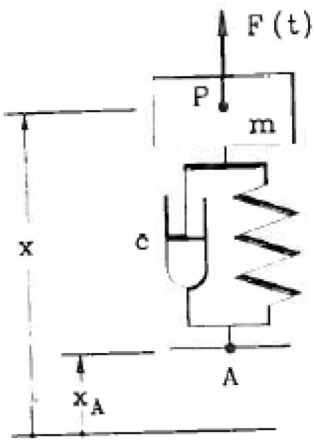
Risposte in frequenza

Quando il sistema è eccitato da una forza F(t) con andamento armonico si ricorre a risposte in frequenza non adimensionali che esprimono il rapporto tra una grandezza che caratterizza la risposta del sistema ed il valore dell'ampiezza f_0 della forza F(t).

Risposta in frequenza	**Definizione**	**Unità**	**Lim(λ→0)**
Deformabilità dinamica	x_0/f_0	mm/N	1/k
Rigidezza dinamica	f_0/x_0	N/mm	K
Mobilità	$(\dot{x})_0/f_0 = \lambda x_0/f_0$	m/sN	0
Impedenza meccanica	$f_0/(\dot{x})_0 = f_0/\lambda x_0$	sN/m	∞
Inertanza	$(\ddot{x})_0/f_0 = \lambda^2 x_0/f_0$	m/s^2N	0
Massa dinamica	$f_0/(\ddot{x})_0 = f_0/\lambda^2 x_0$	s^2N/m	∞

N.B. nei temi d'esame guardare i grafici delle risposte in frequenza!!!

Equazioni di moto di sistemi con smorzamento viscoso



Il termine smorzatore viscoso viene generalmente usato per indicare un dispositivo che introduce nel sistema una forza proporzionale alla velocità e con direzione opposta a quest'ultima.

Scrivo l'equazione dell'equilibrio dinamico in direzione x:

Sistema di riferimento assoluto → m$\ddot{x}$=-k(x-x_A-l$_0$)-c($\dot{x}$-$\dot{x}_A$)+F(t)-mg

Sistema di riferimento relativo → m($\ddot{x}$+$\ddot{x}_A$)=-k(x-l$_0$)-c$\dot{x}$+ F(t)-mg

Trascurando i termini costanti l'equazione da studiare diventa: m$\ddot{x}$+c$\dot{x}$+kx=c $\dot{x}_A + kx_A$+ F(t)

Oscillazioni libere

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

ha una soluzione del tipo $x = x_0{}^* e^{st}$, quindi derivando→ $\dot{x}=s\, x_0{}^* e^{st}$, $\ddot{x}=s^2\, x_0{}^* e^{st}$

Sostituendo tali soluzioni nell'equazione delle oscillazioni libere di un sistema smorzato:

$m\, s^2\, x_0{}^* \cancel{e^{st}} + c\, s\, x_0{}^* \cancel{e^{st}} + k x_0{}^* \cancel{e^{st}} = 0 \rightarrow x_0{}^*(m\, s^2 + cs + k) = 0$

$m\, s^2 + cs + k = 0 \rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mk}}{2m}$.

Tre casi:

- c^2-4mk=0

  $c^2=4mk \rightarrow c=\sqrt{4mk} \rightarrow c=2\sqrt{mk}=c_{cr}$.

  Definiamo $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$: SMORZAMENTO CRITICO

  Introduciamo $\xi=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$, in questo caso abbiamo $\xi=1$

- c^2-4mk>0→ $c>c_{cr}$: SISTEMA SOVRASMORZATO ($\xi>1$)

- c^2-4mk<0→ $c< c_{cr}$: SISTEMA SOTTOSMORZATO ($\xi<1$)

Lo smorzamento critico, $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$, è il massimo valore dello smorzamento che permette al sistema di oscillare. Nel caso di sistema sovrasmorzato il sistema è non oscillatorio ed è costituito da due termini che decrescono monotonicamente nel tempo, dato che s ha due soluzioni che sono entrambe negative.

$m\, s^2 + cs + k = 0 \rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$, dato che $\lambda_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\xi=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$, riscriviamo l'equazione in forma adimensionale: $s^2 + 2\xi\lambda_n s + \lambda_n{}^2 = 0$ con $\xi>1$, le soluzioni reali sono $s=-\lambda_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2-1})$

Nel caso di sistemi sottosmorzati, invece, abbiamo una parte immaginaria che indica la pulsazione delle oscillazioni libere del sistema smorzato e una parte reale (cambiata di segno) che esprime la velocità alla quale l'ampiezza si riduce nel tempo, quest'ultima è detta fattore di decadimento o velocità di decadimento, che si indica con σ. Soluzione: s=- $\lambda_n(\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})$

quindi introduciamo: $\begin{cases} \sigma = -R(s) = \lambda_n \xi \\ \lambda_p = Imf(s) = \lambda_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$

λ_p: PULSAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA VISCOSO

La soluzione generale dell'equazione omogenea è: x=$e^{-\sigma t}[c_1^* e^{i\lambda_p t} + c_2^* e^{-i\lambda_p t}]$

Dato che x è un numero reale e c_1^* e c_2^* sono complessi coniugati questa equazione possiamo scriverla nella forma: x=$e^{-\sigma t}[c_1\cos(\lambda_p t) + c_2 \sin(\lambda_p t)]$.

La parte reale di s è sempre negativa (quindi velocità di decadimento positiva) e il comportamento del sistema è stabile, cioè smorzato; se invece la parte reale di s fosse positiva il sistema sarebbe di tipo autoeccitato. Bisogna tenete d'occhio che in questo caso la pulsazione delle oscillazioni è inferiore data la presenza del fattore $\sqrt{1-\xi^2}$. (questo discorso non vale invece per altri smorzamenti)

Come c.i. consideriamo all'istate t=0: x(0)= c_1 e ẋ(0)=- $\sigma c_1 + \lambda_p c_2$

si ottiene $c_1 =$ x(0) e $c_2 = \frac{1}{\lambda_p}[\dot{x}(0) + \sigma x(0)]$

l'equazione che descrive le oscillazioni smorzate del sistema in funzione delle c.i. è:

x=$e^{-\sigma t}[x(0)\cos(\lambda_p t) + \frac{1}{\lambda_p}[\dot{x}(0) + \sigma x(0)]\sin(\lambda_p t)]$.

Ci interessa estrapolare il <u>rapporto tra le ampiezze di due picchi successivi</u>:

$\frac{x^i}{x^{i+1}} = \frac{e^{-\lambda_n \xi t_i}}{e^{-\lambda_n \xi t_{i+1}}} = e^{-\lambda_n \xi (t_i - t_{i+1})} = e^{-\lambda_n \xi \frac{2\pi}{\lambda_p}} = e^{-\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ → è un rapporto costante

Infatti il tempo che intercorre tra due picchi successivi può essere semplificato come: $\frac{2\pi}{\lambda_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Si definisce <u>decremento logaritmico</u>: $\delta = \ln\left(\frac{x^{i}}{x^{i+1}}\right) = \ln\left(e^{\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) = \xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi$

Il decremento logaritmico dà una misura dello smorzamento del sistema e può essere misurato sperimentalmente dalle registrazioni dell’ampiezza in funzione del tempo.

La traiettoria nel piano degli stati delle oscillazioni libere in funzione di un sistema lineare con smorzamento viscoso è una spirale logaritmica.

Oscillazioni forzate

Il moto di un sistema smorzato sotto l’azione di un’eccitazione armonica può essere calcolato semplicemente sommando una soluzione particolare dell’equazione $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\,\dot{x}_A + kx_A+F(t)$ all’equazione omogenea $x=e^{-\sigma t}[c_1^* e^{i\lambda_p t}+ c_2^* e^{-i\lambda_p t}]$, si preferisce usare la notazione complessa.

Con $F(t)= f_0 e^{i\lambda t} \rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f_0 e^{i\lambda t}$

Con eccitazione dovuta allo spostamento del punto di vincolo:

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= x_A(i\lambda c + k)\, e^{i\lambda t}$

Analizziamo il caso con la F(t)

Scriviamo: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f_0 e^{i\lambda t}$ in forma adimensionale$\rightarrow \ddot{x}^2 +2\xi\lambda_n\dot{x}+ \lambda_n^{\,2} x = \lambda_n^{\,2}\ \frac{f_0 e^{i\lambda t}}{k}$

La soluzione è del tipo $x = x_0 e^{i\lambda t}$, $\dot{x}=i\lambda\, x_0 e^{i\lambda t}$, $\ddot{x}=i^2\lambda^2\, x_0\, e^{st} =-\lambda^2\, x_0\, e^{i\lambda t}$

si ottiene: $-\lambda^2\, x_0\, \cancel{e^{i\lambda t}}+2\xi\lambda_n\, i\lambda\, x_0 \cancel{e^{i\lambda t}}+\lambda_n^{\cancel{2}}\, x_0 e^{i\lambda t}= \lambda_n^{\cancel{2}}\ \frac{f_0 e^{i\lambda t}}{k}$

$-\lambda^2\, x_0 +2\xi\lambda_n\, i\lambda\, x_0+\lambda_n^{\,2}\ x_0= \lambda_n^{\,2}\ \frac{f_0}{k} \rightarrow x_0\,(-\lambda^2 +2\xi\lambda_n\, i\lambda+\lambda_n^{\,2})= \lambda_n^{\,2}\ \frac{f_0}{k}\rightarrow$

$x_0=\frac{f_0}{k}\frac{\lambda_n^{\,2}}{-\lambda^2 +2\xi\lambda_n\, i\lambda+\lambda_n^{\,2}} \rightarrow x_0=\frac{f_0}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2+2i\xi\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)}$

Separo parte reale e parte immaginaria:

$b=\frac{\lambda}{\lambda_n}$; $a= \xi\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$

$c=\frac{f_0}{k}\frac{1}{(1-(b)^2)+2i\xi a}*\frac{(1-(b)^2)-2i\xi a}{(1-(b)^2)-2i\xi a}=\frac{f_0}{k}\frac{(1-(b)^2)-2i\xi a}{(1-(b)^2)^2-4i^2a^2}=\frac{f_0}{k}\frac{(1-(b)^2)-2i\xi a}{(1-(b)^2)^2+1(2a)^2}$

$$=\frac{f_0}{k}\{\frac{(1-(b)^2)-2i\xi a}{(1-(b)^2)^2+1(2a)^2}-i\frac{2\xi a}{(1-(b)^2)^2+1(2a)^2}\}\rightarrow$$

$$c=\frac{f_0}{k}\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}-i\frac{2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}\}$$

<u>Risposta in frequenza</u>: $H(\lambda)=\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}-i\frac{2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}\}$

$\rightarrow H(\lambda)=\frac{cf_0}{k}$

La risposta in frequenza di un sistema smorzato è espressa da un numero complesso, questo significa che risposta ed eccitazione non sono in fase tra loro.

Dato che c e f_0 sono espressi da numeri complessi, la risposta del sistema può essere scritta nella forma: $x=R\left(ce^{i\lambda t}\right)=\frac{1}{k}R[H(\lambda)\ f_0e^{i\lambda t}]$.

La parte reale della risposta in frequenza dà la componente della risposta che è in fase con l'eccitazione, la parte immaginaria invece dà la componente che è in anticipo di 90° rispetto alla forza eccitatrice.

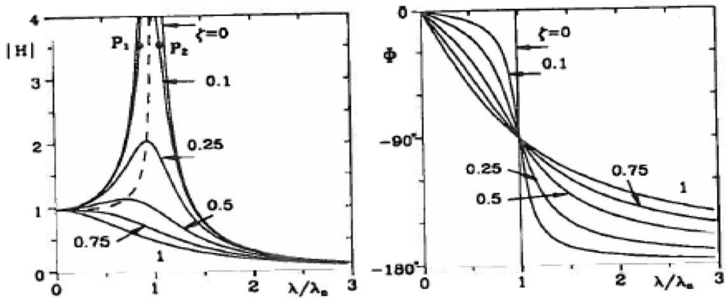
Per la H(λ) si definiscono:

- $Re(H)=\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}$
- $Im(H)=\frac{2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}}{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}$
- $|H|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}}$
- $\Phi=arctg[\frac{-2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}]$

La soluzione completa dell'equazione del moto si ottiene sommando le soluzioni ottenute per le oscillazioni libere e forzate:
$x=e^{-\sigma t}[c_1\cos(\lambda_p t)+c_2\sin(\lambda_p t)]+Re[H(\lambda)\ f_0e^{i\lambda t}]$
c_1 e c_2 si trovano applicando le c.i.

Il primo termine dell'equazione tende a 0 abbastanza rapidamente, quindi si trascura quando si studia la risposta di un sistema smorzato ad una eccitazione armonica, mentre il secondo termine ha ampiezza costante nel tempo ed esprime la risposta in regime stazionario.
Nel caso di eccitazione dovuta al moto armonico del punto di vincolo A:
$\ddot{x}^2 + 2\xi\lambda_n\dot{x} + \lambda_n{}^2 x = x_A\ (2i\xi\lambda\lambda_n + \lambda_n{}^2)e^{i\lambda t}$, separando come fatto nel caso con F(t) si ottiene H(λ)=$\frac{c}{x_A}$. Un esempio comune di sistema eccitato mediante spostamento del vincolo è quello di una sospensione elastica e smorzante usata per isolare qualsiasi sistema dalle vibrazioni che ad esso possono essere trasmesse dall'ambiente esterno.

Il modulo della risposta in frequenza $|H|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}}$ viene spesso definito <u>fattore di amplificazione</u> e viene riportato nel grafico seguente in funzione di λ, insieme all'angolo di fase Φ per diversi valori dello smorzamento.



Da tale grafico osserviamo che al diminuire dello smorzamento le curve tendono a quelle che caratterizzano il sistema non smorzato, mentre al crescere di c l'altezza del pizzo di risonanza diminuisce. Il valore della pulsazioni a cui il picco è situato si trova:
$\lambda(|H|_{MAX}) = \lambda_n\sqrt{1-2\xi^2}$. Al crescere dello smorzamento $\lambda(|H|_{MAX})$ si sposta verso valori sempre più bassi e non coincide né con λ_p né con λ_n. Invece, per piccoli valori dello smorzamento, si ha $\lambda(|H|_{MAX}) \approx \lambda_p \approx \lambda_n$ e il massimo valore del rapporto di amplificazione è $|H|_{MAX} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ se lo smorzamento è basso e ξ^2 è trascurabile $\rightarrow |H|_{MAX} = \frac{1}{2\xi}$. Le formule appena riportate valgono se $\xi<0.7$, per valori maggiori la curva H(λ) non presenta alcun picco ed il massimo di $|H|$ si ha in λ=0 ed è uguale ad 1.

Il valore massimo della risposta in frequenza è definito fattore di qualità e si indica con la lettera Q: Q= $|H|_{MAX}$.