



Centro Stampa

**ATTENZIONE QUESTI APPUNTI SONO OPERA DI STUDENTI , NON SONO STATI VISIONATI
DAL DOCENTE. IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

N° 1004

**BIOMECCANICA DEI SOLIDI
TEORIA TEMI ESAME**

DI BETTALE VALENTINA

30 settembre 2014

CARICHI di PROGETTO

Per progettare una struttura, devo decidere i carichi
si dividono in:

◦ **STATICI**: quando la variabile tempo non interviene

- se sul sistema agisce una forza costante
- se il carico non è costante, ma la forza è applicata "lentamente" e per "lunga" durata
- Devono essere resistenti al sovraccarico e anche al comportamento a fatica (carichi ripetuti)
- sia progettazione statica, sia a fatica (usando il carico medio a frequente)
- attenzione anche all'invecchiamento (degradarsi nel tempo delle proprietà) e all'usura → calcolo ad usura
- 13 parametri della progettazione sono quindi: sovraccarico - fatica - usura
- Tempi caratteristica di applicazione della forza molto $\gg \gg$ del periodo della prima risonanza → costi sono trascurabili (altrimenti, se sono circa $\approx$ → dinamico) forze di inerzia e la densità (aumenti no)

ex: peso proprio
pressione in un vaso arterioso
resistenza aerodinamica di un aereo

• **QUASI-STATICI** : la cui origine fisica è dinamica,
ma il cui effetto è statico, cioè è statica la
 loro trattazione

- Non intervenire la fatica

ex: forze centrifughe

accelerazioni costanti

• **DINAMICI** : forze che variano rapidamente,
 cioè tempi di applicazione delle forze confrontabili
con quelli del sistema

- effetti di risonanza

- effetti di vibrazioni

- fatica : diversi effetti sulla struttura

- sovrasollecitazione dinamica

ex: forze aerodinamiche (vortici)

rumore

↓ è necessario verificare

↓ quelli che trattiamo noi

Lo studio del comportamento dinamico si divide
 in 3 parti :

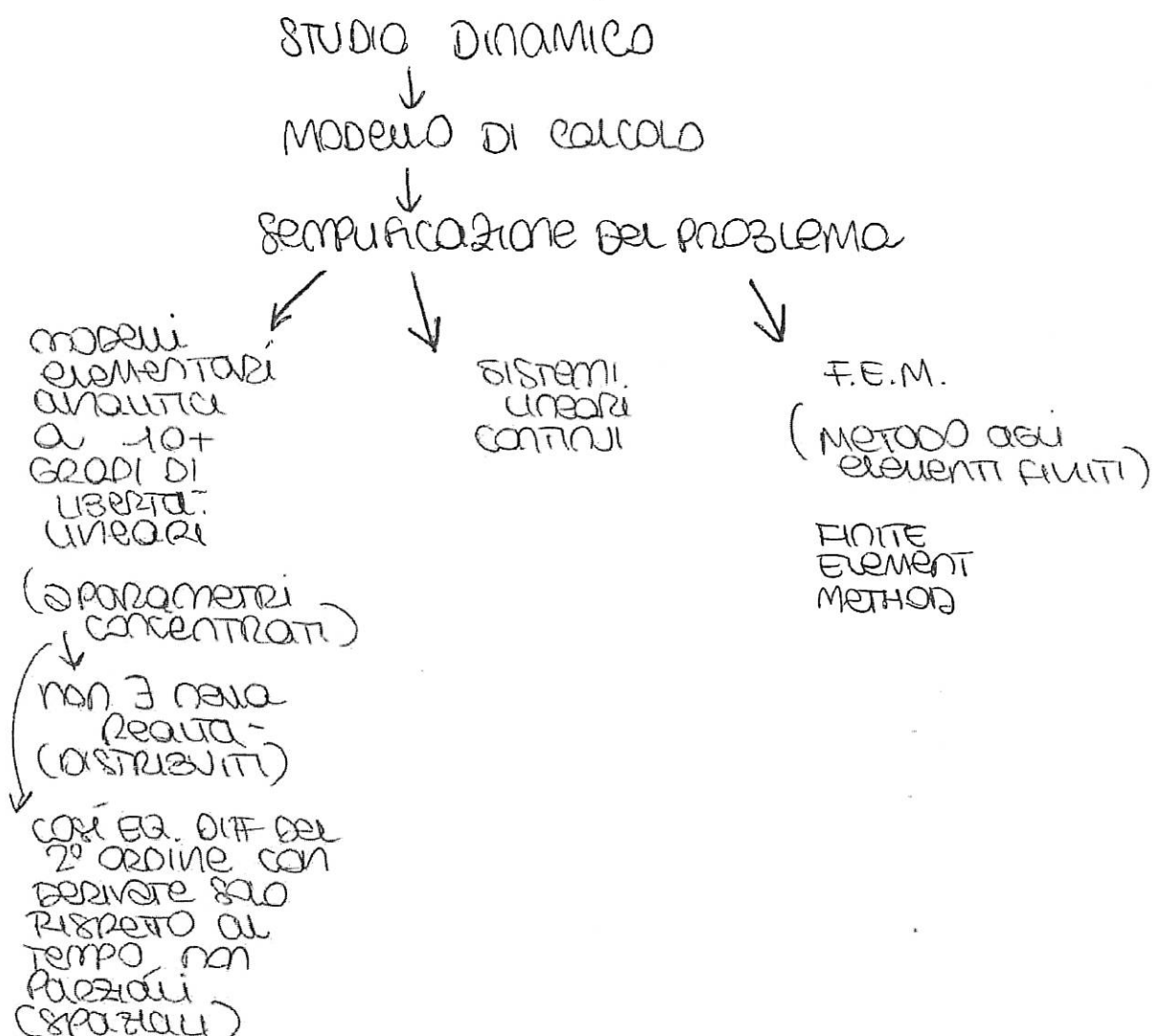
- analisi del comportamento libero o non
forzato, non soggetto alle forze del sistema
- calcolo della risposta forzata
- calcolo la frequenza di risonanza

IN PASSATO, IL CASO DINAMICO SI AFFRONTAVA CON
UN SOVRADIMENSIONAMENTO DEL CASO STATICO →
NON APPLICABILE IN ALCUNI CASI:

- ↑ velocità di Rotazione
- ↑ esigenze di leggerezza e sicurezza
- calcolo dinamico richiesto da normativa
(ex: valvola cardiaca)

sovradimensionamento in base al coeff. moltiplicativo delle sollecitazioni statiche

o sperimentalmente
o calcolo numerico



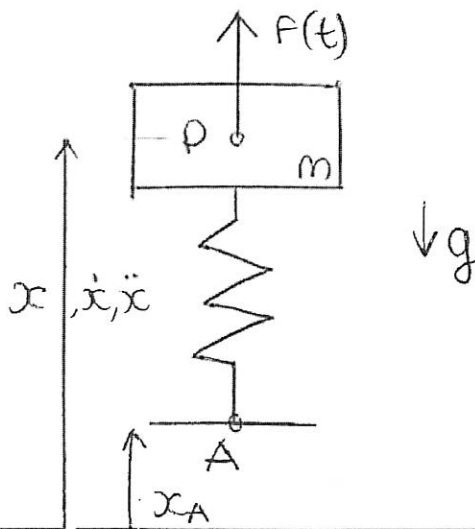
SISTEMI LINEARI AD 1 GdL

SISTEMI LINEARI A PARAMETRI CONCENTRATI

sistema più semplice: oscillatore meccanico lineare
NON SMORZATO a 1 GdL

- massa puntiforme sospesa
- molla con caratteristica lineare

serve a schematizzare sistemi + complessi



$F(t)$ = forza esterna

g = gravità

x = riferimento inerziale

x_A = spostamento del vincolo

m = massa

m = oggetto solo rigido, con massa, non si deforma
 $-m$ = oggetto senza massa, si deforma

assumo che massa e rigidità siano concentrati in 2 oggetti diversi e non che siano distribuiti uniformemente in 1 unico oggetto
 = parametri concentrati

forzanti: • $F(t)$

(forze che sollecitano il sistema)

• spostamento del vincolo

(ex: dorso in automobile)

• accelerazioni costanti

se conta la forza peso ($\bar{g}$)

} negli ex
 bisogna
 capire in
 quale caso
 si è

Lo schema è il primo passo a risolvere con il problema. assieme ad indicare i versi positivi.
 L'unica incognita qui è x .

Forza = forze
D'inerzia appiaste

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO SULLA MASSA

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A - l_0) + F(t) - mg$$

↳ lunghezza iniziale della molla
2 estremi della molla che si spostano, x_A si muove anche il vincolo
(se fosse fisso, $x_A = 0$)

$$m\ddot{x} = -kx + kx_A + kl_0 + F(t) - mg$$

separo le incognite dai termini noti

$$m\ddot{x} + kx = kx_A + kl_0 + F(t) - mg$$

$$m\ddot{x} + kx = k[x_A(t) + l_0] + F(t) - mg$$

si toglie
solo se il
vincolo è
fisso

spostano l'equazione
di una costante nota

CAMBIO LA VARIABILE : $x'_A(t) = x_A(t) + l_0 - \frac{mg}{k}$
l'equazione da risolvere è :

$$m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) + F(t)$$

manca il
termine di 1°
grado = parte
dissipativa

se $\begin{cases} \text{vincolo fermo} : m\ddot{x} + kx = F(t) \\ \text{e si forzante} \end{cases}$

... $\begin{cases} \text{vincolo si muove} : m\ddot{x} + kx = x'_A(t) \\ \text{e no forzante} \end{cases}$

EQUAZIONI
IDENTICHE

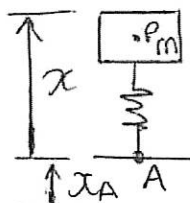


al sistema a cui ci si riferisce!

IN QUESTO CASO IL RIFERIMENTO È INERZIALE!

x è riferita
ad un RPTO
fisso dello
spazio

il riferimento non
inerziale semplifica
le equazioni,
 x_A si è spostato al RPTO
di vincolo A



x = compressione molla
ORA HA UN
RIFERIMENTO MOBILE
(x_A) NON PIÙ FISSO

1 ottobre 2014

SCRIVIAMO DI NUOVO L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO:

 $\ddot{x}$ ora, deve essere inerziale $\rightarrow \ddot{y}$ accelerazione assoluta

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_A) = F(t) - mg - k(x - l_0)$$

↓
usuale a prima,
inerziale

Forza della molla
 x è direttamente l'allungamento
della molla
 $x = l_0$, non c'è forza della molla

$$m\ddot{y} + m\ddot{x}_A = -kx + kl_0 + F(t) - mg$$

$$m\ddot{y} + kx = +kl_0 - m\ddot{x}_A - mg + F(t) \quad x \text{ sarebbe } y \dots$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = -m\ddot{x}_A + f(t)}$$

EQUAZIONE X IL
SISTEMA DI
RIFERIMENTO NON
INERZIALE

nel caso di eccitazione sul vincolo, e se c'è smorzamento,
l'equazione nel sistema di riferimento NON inerziale
è + semplice!

RISOLVIAMO ORA LE EQUAZIONI (DIFF. 2° ORDINE,
LINEARE A TERMINI
CONTANTI)

Δ Le condizioni iniziali si applicano sulla
EQUAZIONE COMPLETA (con l'integrale
particolare)

L'omogenea associata risolve il caso in cui le
forzanti non ci sono $\rightarrow$ **OSCILLAZIONI LIBERE**

che è il comportamento del sistema quando non
agisce nessuna forza esterna sul sistema.

L'omogenea associata è $m\ddot{x} + kx = 0$

la cui soluzione è un'armonica

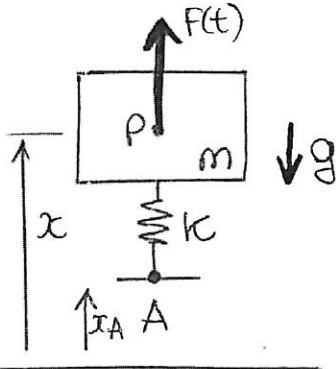
$$1) \quad x = x_0 \cos(\lambda t) + x_1 \sin(\lambda t)$$

che è una sinusoidale con fase qualsiasi, si scrive



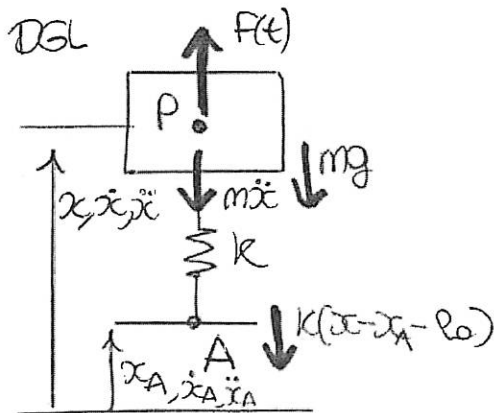
SISTEMI LINEARI a 1GdL a Parametri concentrati = OSCILLATORE MECCANICO LINEARE non SMORZATO

- LINEARI = Accade oscillazioni, Retta da es. lineari x cui vale il principio di sovrapposizione
- 1GdL
- a Parametri concentrati = massa e rigidità sono concentrati in 2 oggetti diversi e non sono distribuite uniformemente in un unico oggetto, utilizza equazioni differenziali ordinarie
- Oscillatore meccanico non smorzato:



- sistema di riferimento inerziale = x è riferita ad un punto fisso dello spazio
- m = massa $\rightarrow$ forza d'inerzia [kg]
- k = rigidità [N/m] $\rightarrow$ forza elastica
- g = gravità $\rightarrow$ forza peso
- x = riferimento inerziale = posizione della massa m
- x_A = spostamento del vincolo, x_A non è fisso
- $F(t)$ = forza esterna
- l_0 = lunghezza iniziale della molla

= massa anti-forme sospesa ad una molla con caratteristica lineare



- Diagramma di corpo libero x trovare l'equazione del sistema
- Indico versi positivi
- Forze d'inerzia = Forze opposte Forze = 0

$$m\ddot{x} + mg + k(x - x_A - l_0) = F(t)$$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A - l_0) + F(t) - mg$$

$$m\ddot{x} + kx = k(x_A(t) + l_0) + F(t) - mg$$

- se il vincolo fosse fisso $\rightarrow x_A = x_A(t) = 0$
- $kl_0 - mg$ spostano l'equazione di una costante nota
- cambio di variabile $x'_A(t) = x_A(t) + l_0 - \frac{mg}{k}$

$$x_A(t) = x'_A(t) - l_0 + \frac{mg}{k}$$

$\ddot{x}$ = accelerazione assoluta

$$m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) - kl_0 + mg + kl_0 + F(t) - mg$$

$$m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) + F(t)$$

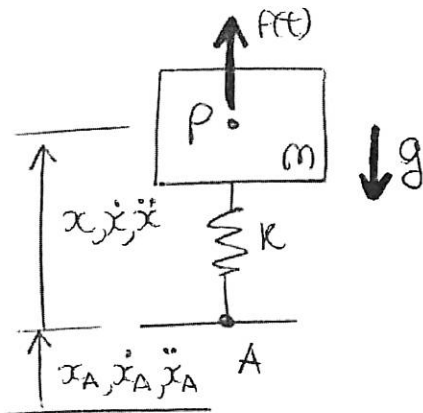
Abbiamo $\neq$ possibilità $\neq$ forzanti $\neq$ equazioni

- forzante esterna $F(t)$
- spostamento del vincolo $x'_A(t)$
- entrambe
- accelerazioni costanti $\rightarrow$ forza peso

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

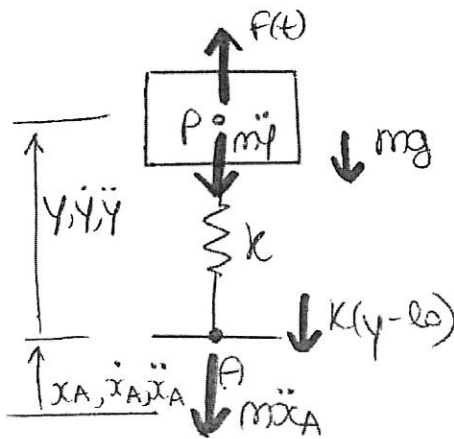
$$m\ddot{x} + kx = kx'_A(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} + kx = F(t) \\ m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) \end{array} \right\} m\ddot{x} + kx = kx'_A(t) + F(t)$$



- sistema di riferimento non inerziale, ma solidale al punto di vincolo A, x ha un riferimento mobile!

- accelerazione assoluta = $\ddot{x} + \ddot{x}_A$
- sarebbe meglio esprimere le x come y , x distingue le dal riferimento di prima



- diagramma di corpo libero

$$m\ddot{y} + m\ddot{x}_A + mg + k(y - l_0) = F(t)$$

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_A) = -k(y - l_0) + F(t) - mg$$

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_A) = -ky + F(t) + (kl_0 - mg)$$

- trascurando i termini costanti

$$m\ddot{y} + ky = -m\ddot{x}_A + F(t)$$

- il sistema di riferimento non inerziale è utile, si porta ad un'equazione più semplice, nel caso di smorzamento + eccitazione sul vincolo

- in qualsiasi sistema siamo, bisogna risolvere le equazioni

$$x_{\text{tot}} = x_{\text{omo}} + x_{\text{part}}$$

soluzione generale = soluzione dell'equazione omogenea associata (transitorio iniziale) + soluzione particolare dell'equazione totale (sorgente esterna)

osservazioni: non ci sono forzanti influenzate dai parametri intrinseci del sistema

esprime il moto causato da un'azione eccitatrice esterna

↓
Bisogna poi immettere 2 condizioni iniziali x .
ottenere 1 soluzione unica